ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΥ ΕΥΣΤΑΘΙΑΝΟΥ

διδάκτορος τῶν Φυσικομαθηματικῶν καὶ τῆς Ἰατρικῆς

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΜΕΤΑ ΠΟΛΛΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

ΕΚ ΤΩΝ ΚΑΘ' ΕΚΑΣΤΗΝ ΕΝ ΧΡΗΣΕΙ

ΔΙΑ ΤΗΝ

ΕΝ ΤΟΙΣ ΣΧΟΛΑΡΧΕΙΟΙΣ, ΑΣΤΙΚΑΙΣ ΣΧΟΛΑΙΣ ΚΑΙ ΠΑΡΘΕΝΑΓΩΓΕΙΟΙΣ

ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΝ

ΕΚΔΟΣΙΣ Β'.

معارف عموميه نظارت جليلەسنك فى ٩ ربيع‌الاخر ٣٢٤ و ٢٠ مايس ٣٢٢ تاريخلى
و ١٩٤٢ نومرولى رخصتنامەسيله پالامارى مطبعەسنده طبع اولنمشدر

ΕΝ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥΠΟΛΕΙ

Ἐκ τοῦ τυπογραφείου Ι. ΠΑΛΛΑΜΑΡΗ, Πέραν, ἀρ. 21

1906

ΕΡΓΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΑ

ΑΛ. ΕΥΣΤΑΘΙΑΝΟΥ

Στοιχειώδης Ἀριθμητική διὰ τὰς τρεῖς ἀνωτέρας τάξεις Ἀστικῆς σχολῆς. Ἐν τῷ συγγράμματι τούτῳ περιέχονται ἅπαντα τὰ νομισματικὰ συστήματα, τὰ μέτρα καὶ τὰ σταθμὰ τὰ ἐν χρήσει παρὰ τοῖς διαφόροις κράτεσι, μετὰ πολλῶν ἐφαρμογῶν εἰς μέγαν ἀριθμὸν προβλημάτων, λυομένων διὰ τῆς μεθόδου τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα. Τιμ. γρ. 5,50.

Στοιχειώδης Φυσικὴ Πειραματική διὰ τὰς ἀνωτέρας τάξεις Ἀστικῆς σχολῆς. Ἡ μόνη τυχοῦσα βραβείου ἐν διαγωνισμῷ τοῦ Ἑλλ. Φιλολογικοῦ Συλλόγου Κωνσταντινουπόλεως καὶ ἐπαινεθεῖσα ὑπὸ ἐξόχων ἐν Ἀθήναις ἐπιστημόνων. Περιέχει πάντα σχεδὸν τὰ καθ' ἑκάστην παρουσιαζόμενα Φυσικὰ φαινόμενα μετὰ συντόμου καὶ σαφοῦς αὐτῶν ἐξηγήσεως. Τιμᾶται γρ. 8.

Ὁ Μικρὸς Φυσιογνώστης, ἢ αἱ Πρῶται γνώσεις τῆς Φυσικῆς καὶ τῆς Χημείας, διὰ τὰ δημοτικὰ σχολεῖα ἢ τὰς κατωτέρας τάξεις τῆς Ἀστικῆς σχολῆς. Ἔκδοσις 1904. Τιμᾶται γρ. 4.

Πᾶν ἀντίτυπον μὴ φέρον τὴν ὑπογραφήν μου θεωρεῖται προερχόμενον ἐκ τυποκλοπίας.

Α. Εὐσταθιανός

Σημ. Αἱ παράγραφοι καὶ τὰ κεφάλαια τὰ σημειούμενα δι' ἀστερίσκου πρέπει οἱ ἀρχάριοι νὰ ἐκμανθάνωσι διὰ προφορικῆς μόνον διδασκαλίας ἢ καὶ ἐντελῶς νὰ παραλείπηται εἰς τὰς κατωτέρας τάξεις ἡ διδασκαλία αὐτῶν.

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΟΥΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄

ΠΕΡΙ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Πρῶται ἔννοιαι.

1. Ὅταν παρατηρῶμεν μαθητάς, στρατιώτας, πρόβατα, μῆλα ἢ ἐν γένει ὅμοια πράγματα, ἢ πράγματα, τῶν ὁποίων τὰς διαφορὰς (μαθηταὶ μικροὶ καὶ μεγάλοι) παραβλέπομεν, ἀμέσως γεννᾶται εἰς ἡμᾶς ἡ ἔννοια τοῦ ἑνὸς καὶ τῶν πολλῶν ἢ τοῦ πλήθους.

Μονάς. Μονὰς λέγεται πᾶν ὅ,τι θεωρεῖται ὡς ἓν ὅλον· π. χ. ἐὰν θεωρῶμεν μαθητὰς τάξεώς τινος, ἕκαστος μαθητὴς εἶναι μονάς· ἐὰν θεωρῶμεν πλῆθος καρύων, ἕκαστον κάρυον εἶναι μονάς· ἐὰν θεωρῶμεν καλάθια πλήρη μήλων, ἕκαστον καλάθιον δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς *μονάς*.

Ἕκαστον πλῆθος ὁρίζεται καὶ λαμβάνει ἰδιαίτερόν τι ὄνομα ὅταν εὑρεθῇ πόσαι εἶναι αἱ μονάδες, τὰς ὁποίας περιέχει.

Ἀριθμός. *Ὡρισμένον πλῆθος μονάδων μὲ τὸ ἰδιαίτερον αὐτοῦ ὄνομα* λέγεται *ἀριθμός*.

Ἀριθμητική. *Ἀριθμητικὴ* λέγεται *ἡ ἐπιστήμη, ἡ πραγματευομένη περὶ τῶν ἀριθμῶν*.

Ἀρίθμησις. Ἀρίθμησις λέγεται ὁ τρόπος, διὰ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν πόσαι εἶναι αἱ μονάδες, αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦσι πλῆθός τι, προσέτι δὲ ἡ διδασκαλία τῆς ὀνοματολογίας καὶ γραφῆς τῶν ἀριθμῶν.

Ἀριθμῶ σημαίνει *τρέπω πλῆθός τι εἰς ἀριθμόν*, δηλ. εὑρίσκω καὶ ὁρίζω ὑπὸ πόσων μονάδων ἀποτελεῖται τὸ πλῆθος.

Ὅταν ἀριθμήσωμεν δύο πλήθη συγκείμενα ἐξ ὁμοίων μονάδων καὶ εὕρωμεν, ὅτι ὅσας μονάδας ἔχει τὸ ἓν τόσας ἔχει καὶ τὸ ἄλλο, τότε τὰ πλήθη καὶ οἱ ἀριθμοὶ οἱ παριστῶντες ταῦτα λέγονται *ἴσοι*. Τοῦτο παριστῶμεν γράφοντες μεταξὺ τῶν δύο ἴσων ἀριθμῶν τὸ σημεῖον =, ὅπερ λέγεται *ἴσον*.

Ὀνοματολογία καὶ γραφὴ τῶν ἀριθμῶν μέχρι τοῦ δέκα.

2. Ἡ μονὰς ὡς ἀριθμὸς θεωρουμένη καλεῖται *ἓν* καὶ γράφεται διὰ τοῦ συμβόλου 1.

Πλῆθος ἀποτελούμενον ὑπὸ τόσων μονάδων, ὅσοι εἶναι ὁ μέγας τῆς μιᾶς ἡμῶν χειρὸς δάκτυλος μετὰ τοῦ δείκτου, καλεῖται *δύο*, γράφεται δὲ διὰ τοῦ συμβόλου 2. Πλῆθος ἀποτελούμενον ὑπὸ τῶν δύο προηγουμένων δακτύλων καὶ τοῦ μέσου καλεῖται *τρία* καὶ γράφεται 3. Ἕτερον πλῆθος ὑπὸ τῶν τριῶν προηγουμένων καὶ τοῦ παραμέσου καλεῖται *τέσσαρα* καὶ γράφεται 4. Πλῆθος δὲ ἀποτελούμενον ὑπὸ τόσων ὁμοίων πραγμάτων, ὅσοι εἶναι οἱ δάκτυλοι τῆς μιᾶς ἡμῶν χειρός, καλεῖται *πέντε* καὶ γράφεται 5.

Παραθέτοντες μετὰ τούτων καὶ ἕνα ἕκαστον τῶν δακτύλων τῆς ἄλλης χειρὸς σχηματίζομεν κατὰ σειρὰν τοὺς ἀριθμοὺς ἓξ 6, ἑπτὰ 7, ὀκτὼ 8, ἐννέα 9. Τέλος πλῆθος ἀποτελούμενον ὑπὸ τόσων μονάδων, ὅσοι εἶναι οἱ δάκτυλοι τῶν δύο ἡμῶν χειρῶν, λέγεται ***δέκα*** καὶ γράφεται 10.

Τὸ σύμβολον 0 λέγεται *μηδὲν* ἢ *μηδενικόν*. Τὰ σύμβολα:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
ἓν	*δύο*	*τρία*	*τέσσαρα*	*πέντε*	*ἓξ*	*ἑπτὰ*	*ὀκτὼ*	*ἐννέα*	*μηδὲν*

καλοῦνται *ἀριθμητικὰ ψηφία*· καὶ τὰ μὲν ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 9 καλοῦνται *σημαντικὰ ψηφία*, τὸ δὲ 0 ***μηδὲν*** καλεῖται *βοηθητικὸν ψηφίον*. Διὰ μόνων τῶν ψηφίων τούτων γράφονται πάντες οἱ ἀριθμοί.

Μονάδες διαφόρων τάξεων.

3. Ὁ ἀριθμὸς δέκα θεωρεῖται ὡς νέα μονὰς καὶ λέγεται *δεκάς*. Ἐὰν τὴν δεκάδα λάβωμεν δέκα φοράς, σχηματίζεται ἀριθμός, ὅστις λαμβάνεται ὡς νέα μονὰς καὶ καλεῖται *ἑκατοντάς*. Ἡ μονὰς αὕτη ὡς ἀριθμὸς καλεῖται *ἑκατὸν* καὶ γράφεται 100.

Ἐπίσης, ἐὰν τὴν ἑκατοντάδα λάβωμεν δέκα φοράς, σχηματίζεται ἀριθμός, ὅστις καλεῖται *χίλια* καὶ γράφεται 1000. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος θεωρεῖται ὡς νέα μονὰς καὶ καλεῖται τότε *χιλιάς*. Οὕτω λαμβάνοντες ἑκάστην μονάδα δέκα φορὰς σχηματίζομεν νέαν ἀμέσως ἀνωτέραν κατὰ τὴν ἑξῆς σειράν·

ἁπλῆ μονάς,	ἥτις	γράφεται	1
δεκάς,	»	»	10
ἑκατοντάς,	»	»	100
χιλιάς,	»	»	1 000
δεκὰς χιλιάδων,	»	»	10 000
ἑκατοντὰς χιλιάδων,	»	»	100 000
ἑκατομμύριον,	»	»	1 000 000
δεκὰς ἑκατομμυρίου,	»	»	10 000 000
ἑκατοντὰς ἑκατομμυρίου,	»	»	100 000 000
δισεκατομμύριον,	»	»	1 000 000 000
δεκὰς δισεκατομμυρίων,	»	»	10 000 000 000
ἑκατοντὰς δισεκατομμυρίων,	»	»	100 000 000 000
τρισεκατομμύριον,	»	»	1 000 000 000 000

κ. τ. λ.

Ἐνταῦθα τὸ ἑκατομμύριον π. χ. σχηματίζεται ἐκ τῆς ἑκατοντάδος χιλιάδων, ἐὰν λάβωμεν ταύτην δέκα φοράς· ἐπίσης, ἐὰν λάβωμεν δέκα φορὰς τὴν ἑκατοντάδα τῶν ἑκατομμυρίων, σχηματίζεται τὸ δισεκατομμύριον κτλ.

4. Ἑκάστη τῶν μονάδων τούτων γράφεται, ἐὰν πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς ἀμέσως κατωτέρας (ἐκ τῆς ὁποίας καὶ παράγεται) τεθῇ ἓν μηδενικὸν ἀκόμη.

5. Ἡ ἁπλῆ μονὰς καλεῖται καὶ *μονὰς πρώτης τάξεως*, ἡ δεκὰς

μονὰς δευτέρας τάξεως, ἡ ἑκατοντὰς *μονὰς τρίτης τάξεως* καὶ καθεξῆς. Τῶν μονάδων τούτων αἱ μὲν *ἁπλῆ μονάς, χιλιάς, ἑκατομμύριον, δισεκατομμύριον, τρισεκατομμύριον* λέγονται *πρωτεύουσαι* ἢ *ἀρχικαί*, αἱ δὲ λοιπαὶ *δευτερεύουσαι*.

Αἱ μονάδες αὗται χωρίζονται ἀνὰ τρεῖς εἰς τμήματα· καὶ αἱ μὲν τρεῖς πρῶται ἀποτελοῦσι τὸ τμῆμα τῶν ἁπλῶν μονάδων, αἱ τρεῖς ἀμέσως κατόπιν αὐτῶν τὸ τμῆμα τῶν χιλιάδων καὶ κατὰ σειρὰν αἱ ἄλλαι τὸ τμῆμα τῶν ἑκατομμυρίων, τῶν δισεκατομμυρίων καὶ καθεξῆς.

Ὡς ἀριθμοὶ θεωρούμεναι αἱ μονάδες αὗται καλοῦνται κατὰ σειρὰν ἕν, δέκα, ἑκατόν, χίλια, δέκα χιλιάδες, ἑκατὸν χιλιάδες, ἓν ἑκατομμύριον, δέκα ἑκατομμύρια . . . ἓν δισεκατομμύριον . . . ἓν τρισεκατομμύριον κ. τ. λ.

Ὀνοματολογία καὶ γραφὴ πάντων τῶν ἀριθμῶν.

6. **Διψήφιοι ἀριθμοί.** Ὅπως διὰ τῆς ἐπαναλήψεως τῆς ἁπλῆς μονάδος σχηματίζονται ἀριθμοί, οὕτω καὶ ἐκ τῆς ἐπαναλήψεως τῆς δεκάδος σχηματίζονται ἀριθμοὶ ὡς ἑξῆς·

2 δεκάδες	ἢ	εἴκοσι	μονάδες,	ὅστις	γράφεται	20
3 »	»	τριάκοντα	»	»	»	30
4 »	»	τεσσαράκοντα	»	»	»	40
5 »	»	πεντήκοντα	»	»	»	50
6 »	»	ἑξήκοντα	»	»	»	60
7 »	»	ἑβδομήκοντα	»	»	»	70
8 »	»	ὀγδοήκοντα	»	»	»	80
9 »	»	ἐνενήκοντα	»	»	»	90
10 »	»	ἑκατόν	»	»	»	100

Καθὼς βλέπομεν, ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν τούτων μέχρι τοῦ ἐνενήκοντα γράφεται διὰ τοῦ παριστῶντος τὸ πλῆθος τῶν δεκάδων σημαντικοῦ ψηφίου μεθ' ἑνὸς μηδενικοῦ πρὸς τὰ δεξιά.

Μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν τούτων ὑπάρχουσι καὶ ἄλλοι περιέχοντες ἐκτὸς τῶν δεκάδων καὶ ἁπλᾶς μονάδας. Ἵνα ἀπαγγείλωμεν καὶ τούτους, ἀπαγγέλλομεν πρῶτον τὰς δεκάδας καὶ ἔπειτα τὰς ἁπλᾶς μονάδας· ἵνα δὲ γράψωμεν, γράφομεν πρῶτον τὸ ψηφίον τὸ παριστῶν τὰς δεκάδας καὶ δεξιὰ τούτου ἀμέσως ἀντὶ τοῦ μηδενικοῦ γράφομεν τὸ σημαντικὸν ψηφίον τὸ παριστῶν τὰς μονάδας· οὕτω μεταξὺ τῶν 10 καὶ 20 ὑπάρχουσιν οἱ ἀριθμοὶ δέκα καὶ ἓν ἢ ἕνδεκα, ὅστις γράφεται 11, δέκα καὶ δύο ἢ δώδεκα 12, δέκα καὶ τρία ἢ ἁπλῶς δεκατρία 13, δεκατέσσαρα 14, δεκαπέντε 15, δεκαὲξ 16, δεκαεπτὰ 17, δεκαοκτὼ 18, δεκαεννέα 19.

Οἱ μετὰ τὸν 20 ἀριθμοὶ ἀπαγγέλλονται καὶ γράφονται κανονικῶς οὕτως·

εἴκοσιν ἓν 21	πεντήκοντα ἑπτὰ 57	ὀγδοήκοντα τρία 83
. . . .	. . . .	. . . .
τριάκοντα πέντε 35	ἑξήκοντα ἓξ 66	ἐνενήκοντα ἐννέα 99.

Πάντες οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι, ἐπειδὴ ἔχουσι δύο ψηφία, λέγονται *διψήφιοι ἀριθμοί*.

7. **'Αριθμοὶ τριψήφιοι.** Ὁ ἑκατὸν εἴπομεν ὅτι θεωρεῖται ὡς νέα μονάς. Διὰ τῆς ἐπαναλήψεως ταύτης ὁμοίως σχηματίζονται ἀριθμοί, *ἑκατοντάδες* καλούμενοι. Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι γράφονται διὰ σημαντικῶν ψηφίων μετὰ δύο μηδενικῶν πρὸς τὰ δεξιὰ οὕτω:

2	ἑκατοντάδες	ἢ	διακόσιαι	μονάδες,	ὅστις	γράφεται	200
3	»	»	τριακόσιαι	»	»	»	300
4	»	»	τετρακόσιαι	»	»	»	400
5	»	»	πεντακόσιαι	»	»	»	500
6	»	»	ἑξακόσιαι	»	»	»	600
7	»	»	ἑπτακόσιαι	»	»	»	700
8	»	»	ὀκτακόσιαι	»	»	»	800
9	»	»	ἐνεακόσιαι	»	»	»	900
10	»	»	χίλιαι	»	»	»	1000

Ὁ ἀριθμὸς χίλιαι μονάδες, ὅστις θεωρεῖται ὡς νέα μονάς, γράφεται διὰ τῆς ἁπλῆς μονάδος μετὰ τριῶν μηδενικῶν πρὸς τὰ δεξιά.

'Αντὶ τοῦ διακόσιαι μονάδες, τριακόσιαι κ.τ.λ., λέγουσιν ἁπλῶς *διακόσια*, *τριακόσια*, *τετρακόσια* κτλ. *χίλια*.

8. Μεταξὺ τῶν ἑκατοντάδων τούτων ὑπάρχουσι καὶ ἄλλοι ἀριθμοὶ περιέχοντες ἐκτὸς τῶν ἑκατοντάδων καὶ δεκάδας ἢ μονάδας ἢ συγχρόνως δεκάδας καὶ μονάδας.

Ἵνα καὶ τούτους ἀπαγγείλωμεν καὶ γράψωμεν, ἀπαγγέλλομεν τὰς ἑκατοντάδας, ἔπειτα τὰς δεκάδας, ἐὰν ὑπάρχωσι, καὶ μετὰ ταῦτα τὰς ἁπλᾶς μονάδας, ἂν ὑπάρχωσι· γράφομεν δὲ πρῶτον τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων, δεξιὰ τούτου τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ τῶν δεκάδων τὸ ψηφίον τῶν μονάδων.

Ὅταν δεκάδες ἢ μονάδες δὲν ὑπάρχωσι, θέτομεν εἰς τὴν θέσιν αὐτῶν τὸ βοηθητικὸν ψηφίον 0, ἵνα συμπληρωθῇ ἡ θέσις.

Π. χ. Ὁ ἀριθμὸς ὁ περιέχων τρεῖς ἑκατοντάδας καὶ 4 μονάδας ἀπαγγέλλεται *τριακόσια τέσσαρα*, γράφεται δὲ 304· ὁ δὲ περιέχων 5 ἑκατοντάδας καὶ 8 δεκάδας ἀπαγγέλλεται *πεντακόσια ὀγδοήκοντα*, γράφεται δὲ 580, καὶ ὁ περιέχων 9 ἑκατοντάδας 7 δεκάδας καὶ 4 μονάδας ἀπαγγέλλεται *ἐνεακόσια ἑβδομήκοντα τέσσαρα* καὶ γράφεται 974.

Βλέπομεν ἐκ τούτου, ὅτι τὸ τμῆμα τῶν μονάδων συμπληροῦται πάντοτε διὰ τριῶν ψηφίων.

Πάντες οἱ ἀριθμοὶ ἀπὸ τοῦ 100 μέχρι τοῦ 999, ὡς ἔχοντες τρία ψηφία, καλοῦνται *τριψήφιοι ἀριθμοί*.

9. **Πολυψήφιοι ἀριθμοί.** Διὰ τῆς ἐπαναλήψεως τῆς χιλιάδος σχηματίζονται ἀριθμοὶ *χιλιάδες* καλούμενοι.

Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι ὀνομάζονται ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ, ὁ ὁποῖος φανερώνει ποσάκις ἐλήφθη ὁ χίλια, εἰς τὸν ὁποῖον προσαρτᾶται ἡ λέξις *χιλιάδες*, γράφονται δὲ δι' ἀριθμῶν, πρὸς τὰ δεξιὰ τῶν ὁποίων τίθενται τρία μηδενικά. Τὰ μηδενικὰ ταῦτα ἀποτελοῦσι τὸ *τμῆμα τῶν μονάδων*, τὸ *ὁποῖον πρέπει πάντοτε νὰ γράφηται πλήρες δεξιὰ τῶν χιλιάδων*. Οὕτως ἔχομεν

δύο χιλ. 2 000	ἑβδομήκοντα πέντε χιλ. 75 000	ἐνεακόσια ἐνενήκοντα ἐννέα χιλ. 999 000
τρεῖς » 3 000	ἑκατὸν τρεῖς χιλ. 103 000	
. . . . . .	. . . . , . .	

Οἱ ἀριθμοὶ

εἴκοσι	χιλ. 20 000		ἑξήκοντα	χιλ.	60 000
τριάκοντα	» 30 000		ἑβδομήκοντα	»	70 000
τεσσαράκοντα	» 40 000		ὀγδοήκοντα	»	80 000
πεντήκοντα	» 50 000		ἐνενήκοντα	»	90 000

γίνονται καὶ διὰ τῆς ἐπαναλήψεως τῆς *δεκάδος χιλιάδων* καὶ ἀποτελοῦσι τὰς δεκάδας χιλ. Οἱ δὲ ἀριθμοὶ

διακόσιαι	χιλ. 200 000		ἑξακόσιαι	χιλ.	600 000
τριακόσιαι	» 300 000		ἑπτακόσιαι	»	700 000
τετρακόσιαι	» 400 000		ὀκτακόσιαι	»	800 000
πεντακόσιαι	» 500 000		ἐνεακόσιαι	»	900 000

γίνονται καὶ διὰ τῆς ἐπαναλήψεως τῆς *ἑκατοντάδος χιλιάδων* καὶ ἀποτελοῦσι τὰς ἑκατοντάδας τῶν χιλιάδων.

10. Ἂν ἀριθμός τις ἐκ τῶν χιλιάδων περιέχῃ καὶ τινας μονάδας, γράφομεν ταύτας δεξιὰ τῶν χιλιάδων, φροντίζοντες ὅπως, *ἂν μονάδες τάξεώς τινος εἰς τὸ τμῆμα τῶν μονάδων δὲν ὑπάρχωσι, συμπληρῶμεν τὴν θέσιν αὐτῶν διὰ μηδενικοῦ καὶ εὑρίσκηται οὕτω δεξιὰ τῶν χιλιάδων πλῆρες τὸ τριψήφιον τμῆμα τῶν μονάδων.*

Οὕτως ὁ ἀριθμὸς τριακόσιαι πεντήκοντα χιλιάδες καὶ ὀκτὼ μονάδες γράφεται 350 008. Δεξιὰ τοῦ 350 ἐγράφησαν πρῶτον δύο μηδενικὰ καὶ κατόπιν τὸ 8, ἵνα συμπληρωθῶσιν αἱ θέσεις τῶν μὴ ὑπαρχουσῶν ἑκατοντάδων καὶ δεκάδων εἰς τὸ τμῆμα τῶν μονάδων, κατόπιν δὲ δεξιὰ ἐγράφησαν καὶ αἱ 8 ὑπάρχουσαι ἁπλαῖ μονάδες καὶ οὕτω συνεπληρώθη τὸ τριψήφιον τμῆμα τῶν μονάδων. Ὁ ἀριθμὸς πεντακόσιαι ἐννέα χιλιάδες καὶ 37 μονάδες γράφεται 509 037· καὶ ἐνταῦθα δεξιὰ τοῦ 509 ἐγράφη ἓν μηδενικόν, ἵνα συμπληρωθῇ ἡ θέσις τῶν μὴ ὑπαρχουσῶν ἑκατοντάδων εἰς τὸ τμῆμα τῶν μονάδων. Ὁ ἀριθμὸς ὀγδοήκοντα τέσσαρες χιλιάδες ἑξακόσια ἑπτὰ γράφεται 84 607.

Ὅπως διὰ τῆς ἐπαναλήψεως τῆς χιλιάδος παράγονται αἱ χιλιάδες, οὕτω καὶ διὰ τῆς ἐπαναλήψεως τοῦ ἑκατομμυρίου παράγονται ἀριθμοί, *ἑκατομμύρια* καλούμενοι.

Ἵνα ἀπαγγελθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι, ἀπαγγέλλεται πρῶτον ὁ ἀριθμός, ὅστις φανερώνει ποσάκις ἐλήφθη τὸ ἑκατομμύριον καὶ εἰς τοῦτον προσαρτᾶται ἡ λέξις *ἑκατομμύρια*. Μετὰ τὰ ἑκατομμύρια δυνατὸν νὰ ὑπάρχωσι καὶ χιλιάδες καὶ μονάδες. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει ἀπαγγέλλομεν καὶ τὰς χιλιάδας καὶ ἔπειτα τὰς μονάδας. Ἵνα δὲ γραφῶσι, γράφεται πρῶτον ὁ ἀριθμός, ὅστις φανερώνει πόσα εἶναι τὰ ἑκατομμύρια, καὶ δεξιὰ τούτου πλῆρες τὸ τριψήφιον τμῆμα τῶν χιλιάδων καὶ δεξιώτερον πλῆρες τὸ τριψήφιον τμῆμα τῶν μονάδων. Τὰ τμήματα ταῦτα ἀποτελοῦνται ὑπὸ μηδενικῶν, ὅταν δὲν ὑπάρχωσι παντελῶς οὔτε χιλιάδες οὔτε μονάδες.

11. Ἐκ τοῦ ἑνὸς δισεκατομμυρίου παράγονται τὰ δισεκατομμύρια. Ἐν τῇ ἀπαγγελίᾳ τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις φανερώνει πόσας φορὰς ἐλήφθη τὸ δισεκατομμύριον, προσαρτᾶται ἡ λέξις *δισεκατομμύρια*. Ἐν δὲ τῇ γραφῇ δεξιὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δισεκατομμυρίων γράφεται πλῆρες τὸ τριψήφιον τμῆμα τῶν ἑκατομμυρίων, δεξιὰ δὲ τούτου πλῆρες τὸ τμῆμα τῶν χιλιάδων καὶ μετὰ τοῦτο πλῆρες τὸ τμῆμα τῶν μονάδων. Τὰ τριψήφια ταῦτα τμήματα ἀποτελοῦνται ὑπὸ μηδενικῶν, ὅταν δὲν ὑπάρχωσι παντελῶς οὔτε ἑκατομμύρια οὔτε χιλιάδες οὔτε μονάδες. Οὕτω προχωροῦντες σχηματίζομεν, ἀπαγγέλλομεν καὶ γράφομεν πάντα ἀριθμόν.

Παράδειγμα. Ὁ ἀριθμὸς πεντακόσια ἑπτὰ ἑκατομμύρια γράφεται 507 000 000. Δεξιὰ τοῦ ἀριθμοῦ 507 ἐτέθησαν ἓξ μηδενικὰ διὰ τὰ τριψήφια τμήματα τῶν χιλιάδων καὶ μονάδων, αἱ ὁποῖαι δὲν ὑπάρχουσιν. Ὁ ἀριθμὸς πεντακόσια τέσσαρα ἑκατομμ., τριάκοντα δύο χιλ., ἑξακόσιαι τριάκοντα πέντε μονάδες γράφεται 504 032 635. Δεξιὰ τοῦ 504 εἰς τὸ τμῆμα τῶν χιλιάδων ἐγράφη πρῶτον ἓν μηδενικόν, ἵνα συμπληρωθῇ ἡ θέσις τῶν ἑκατοντάδων τῶν χιλιάδων, αἵτινες δὲν ὑπάρχουσι.

Συμπέρασμα.

12. Τοιουτοτρόπως διὰ τῶν δέκα ἀριθμητικῶν ψηφίων καὶ διὰ τῶν μονάδων τῶν διαφόρων τάξεων κατορθοῦται ἡ γραφὴ παντὸς

ἀριθμοῦ, ὅταν συγχρόνως ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν καὶ τὴν συμφωνίαν, ὅτι *ἕκαστον ψηφίον γεγραμμένον ἀριστερὰ ἄλλου παριστᾷ μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως*, ἢ τὴν ἑξῆς γενικωτέραν, *ὅταν ἀριστερὰ ψηφίου παριστῶντος ἐκ τῆς θέσεώς του μονάδας οἱασδήποτε τάξεως εὑρίσκηται γεγραμμένος ἄλλος τις ἀριθμός, οὗτος παριστᾷ μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως.*

Κατὰ ταῦτα, ἕκαστον ψηφίον δύναται νὰ παριστᾷ καὶ ἁπλᾶς μονάδας καὶ δεκάδας καὶ ἑκατοντάδας καὶ ἐν γένει μονάδας πάσης τάξεως κατὰ τὴν θέσιν, τὴν ὁποίαν κατέχει ἐν τῷ ἀριθμῷ· π. χ. ὁ ἀριθμὸς 6 παριστᾷ ἁπλᾶς μονάδας, εἰς τοὺς ἀριθμοὺς ὅμως 60, 67, 63 ὁ 6, ὅστις εὑρίσκεται εἰς τὴν δευτέραν θέσιν πρὸς τὰ ἀριστερά, παριστᾷ δεκάδας, εἰς δὲ τοὺς 65 937, 60 000, 60 072 παριστᾷ δεκάδας χιλιάδων.

13. Τοιαύτη εἶναι ἡ μέθοδος, διὰ τῆς ὁποίας ὁρίζομεν τὰ πλήθη, συγχρόνως δ' ἀπαγγέλλομεν καὶ γράφομεν τοὺς ἀριθμοὺς τοὺς παριστῶντας ταῦτα. Ὁ τοιοῦτος σχηματισμός, ἡ γραφὴ καὶ ἡ ἀπαγγελία τῶν ἀριθμῶν ἀποτελοῦσι τὸ λεγόμενον *ἀριθμητικὸν σύστημα.*

Ὁ ἀριθμὸς 10, ὅστις δεικνύει πόσας μονάδας τάξεώς τινος πρέπει νὰ λαμβάνωμεν, διὰ νὰ σχηματίσωμεν μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, λέγεται *βάσις τοῦ συστήματος*. Τὸ δὲ σύστημα, ἕνεκα τῆς βάσεώς του ταύτης, λέγεται *δεκαδικὸν ἀριθμητικὸν σύστημα.*

Κανόνες περὶ ἀπαγγελίας γεγραμμένου ἀριθμοῦ.

14. **Κανὼν α'.** *Ἵνα ἀπαγγείλωμεν ἀριθμόν, ὅστις δὲν ἔχει ψηφία περισσότερα τῶν τριῶν, ἀπαγγέλλομεν χωριστὰ ἕκαστον ψηφίον μετὰ τοῦ ὀνόματος τῆς τάξεως τῶν μονάδων, τὰς ὁποίας παριστᾷ, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὰ ἀριστερά.*

Π. χ. ὁ ἀριθμὸς 527 ἀπαγγέλλεται ὡς ἑξῆς· πέντε ἑκατοντάδες, δύο δεκάδες καὶ ἑπτὰ μονάδες, ἢ καὶ πεντακόσια εἴκοσιν ἑπτά. Ὁ ἀριθμὸς 403 ἀπαγγέλλεται τέσσαρες ἑκατοντάδες καὶ τρεῖς μονάδες ἢ καὶ τετρακόσια τρία. Ὁ ἀριθμὸς 45 ἀπαγγέλλεται τέσσαρες δεκάδες καὶ 5 μονάδες ἢ τεσσαράκοντα πέντε.

Κανὼν β΄. *Ἵνα ἀπαγγείλωμεν ἀριθμὸν ἔχοντα ψηφία περισσότερα ἀπὸ τρία, χωρίζομεν τὸν ἀριθμὸν εἰς τριψήφια τμήματα ἀρχίζοντες ἀπὸ τῶν δεξιῶν· τὸ τελευταῖον πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμῆμα δύναται νὰ εἶναι καὶ διψήφιος ἢ καὶ μονοψήφιος ἀριθμός. Ἀφοῦ χωρίσωμεν οὕτως, ἀρχίζομεν ἀπὸ τὰ ἀριστερὰ ἀπαγγέλλοντες κατὰ σειρὰν ἕκαστον τριψήφιον τμῆμα καὶ ὀνομάζομεν μὲ τὸ ἰδιαίτερόν του ὄνομα.*

Π. χ. Ἐὰν δοθῇ ὁ ἀριθμὸς 3 567 249, ἀφοῦ ἀρχίσωμεν ἀπὸ τὰ δεξιὰ καὶ χωρίσωμεν εἰς τριψήφια τμήματα, παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ πρῶτον πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμῆμα, τὸ ὁποῖον ἐνταῦθα εἶναι διψήφιος ἀριθμός, ἀνήκει εἰς τὰ ἑκατομμύρια, λέγομεν λοιπὸν τριάκοντα ἑπτὰ ἑκατομμύρια, πεντακόσιαι ἑξήκοντα ἑπτὰ χιλιάδες καὶ διακόσιαι τεσσαράκοντα ἐννέα μονάδες.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

Νὰ γραφῶσιν οἱ ἀριθμοί:

Πεντακόσια δύο ἑκατομμύρια καὶ ἑβδομήκοντα μονάδες.

Τεσσαράκοντα ἑκατομμύρια, δύο χιλιάδες καὶ ἐνεακόσιαι τρεῖς μονάδες.

Τετρακόσιαι χιλιάδες καὶ ἐνεακόσιαι μονάδες.

Νὰ ἀπαγγελθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ 3 042 060, 6 203 004, 5 070 060, 100 010, 10 101 001, 3 702 400 045.

Πόσας δεκάδας τὸ ὅλον καὶ πόσας ἑκατοντάδας τὸ ὅλον περιέχει ὁ ἀριθμὸς 6745 ;

Νὰ γραφῇ ὁ ἀριθμός, ὅστις ἔχει 54 δεκάδας.

Νὰ γραφῇ ὁ ἀριθμός, ὅστις ἔχει 572 ἑκατοντάδας.

Πόσας ἑκατοντάδας καὶ πόσας δεκάδας χιλιάδων ἔχει τὸ ὅλον ὁ 375 672 ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

16. **Πρόβλημα α΄.** Ὁ πατὴρ ἔδωκεν εἰς τὸ τέκνον 5 μῆλα, ἡ δὲ μήτηρ 4· πόσα μῆλα ἔχει τὸ τέκνον;

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου λαμβάνομεν ἓν ἐκ τῶν μήλων τῆς μητρὸς καὶ θέτομεν αὐτὸ μετὰ τῶν τοῦ πατρός· τότε ταῦτα μὲν γίνονται 5 καὶ 1 ἤτοι 6, μένουν δὲ ἐκ τῶν τῆς μητρὸς 3. Λαμβάνομεν πάλιν 1 ἐκ τούτων καὶ θέτομεν εἰς τὰ 6, ὁπότε ταῦτα γίνονται 7, μένουν δὲ ἐκ τῶν τῆς μητρὸς 2. Λαμβάνομεν πάλιν ἀνὰ ἓν καὶ θέτομεν μετὰ τῶν 7, ὁπότε ταῦτα γίνονται 8 καὶ κατόπιν 9. Ὥστε τὸ τέκνον ἔχει ἐν συνόλῳ 9 μῆλα.

Σημ. Εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ αὐτὸ ἠθέλομεν εὕρῃ, καὶ ἂν ἐλαμβάνομεν ἀνὰ ἓν μῆλον ἐκ τῶν τοῦ πατρὸς καὶ ἐθέτομεν μετὰ τῶν τῆς μητρός.

Πρόβλημα β΄. Ἐπὶ τῆς δεξιᾶς χειρὸς ἔχω 7 γρόσια, ἐπὶ δὲ τῆς ἀριστερᾶς 3 καὶ ἐντὸς τοῦ θυλακίου 4. Πόσα γρόσια ἔχω τὸ ὅλον;

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου θέτομεν ἐπὶ τῆς δεξιᾶς ἀνὰ ἓν τὰ 3 τῆς ἀριστερᾶς λέγοντες 7 (ἐπὶ τῆς δεξιᾶς) καὶ 1 κάμνουν 8, 8 καὶ 1 κάμνουν 9, 9 καὶ 1 κάμνουν 10. Ὥστε τὰ ἐπὶ τῶν δύο χειρῶν γρόσια εὕρομεν οὕτως, ὅτι εἶναι 10. Μετὰ τούτων θέτομεν καὶ πάντα τὰ ἐν τῷ θυλακίῳ ἀνὰ ἕν, λέγοντες 10 καὶ 1 κάμνουν 11, 11 καὶ 1 κάμνουν 12, 12 καὶ 1 κάμνουν 13, 13 καὶ 1 κάμνουν 14.

Καὶ ἐνταῦθα σημειοῦμεν, ὅτι τὸ αὐτὸ θέλομεν εὕρῃ, καὶ ἂν θέσωμεν τὰ γρόσια ἑκατέρας τῶν χειρῶν εἰς τὰ γρόσια τοῦ θυλακίου.

Ἡ πρᾶξις αὕτη, διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν τὰ 5 μετὰ τῶν 4, πόσα εἶναι τὸ ὅλον, ὡς καὶ τὰ 7 γρόσια μετὰ τῶν 3 καὶ τῶν 4 κτλ. λέγεται *πρόσθεσις*. Ὅθεν

17. *Πρόσθεσις λέγεται ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας, δοθέντων δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν, εὑρίσκομεν ἄλλον περιέχοντα πάσας τὰς μονάδας τῶν δοθέντων.*

Οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι πρόκειται νὰ προστεθῶσι, λέγονται *προσθετέοι*, ὁ δὲ διὰ τῆς προσθέσεως εὑρισκόμενος *ἄθροισμα* ἢ *κεφάλαιον*.

Ὅταν θέλωμεν νὰ σημειώσωμεν, ὅτι δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ πρέπει νὰ προστεθῶσι, γράφομεν μεταξὺ αὐτῶν τὸ σημεῖον $+$, τὸ ὁποῖον λέγομεν *σὺν* ἢ *πλέον*.

Οὕτως, ὅταν ἔχωμεν νὰ προσθέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 5, 6 καὶ 7, σημειοῦμεν τοῦτο ὡς ἑξῆς· $5+6+7$ ἢ καὶ $7+5+6$

Σημ. α΄. Εἶναι φανερόν, ὅτι οὐδέποτε δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν μῆνας μετὰ ὀκάδων καὶ πήχεων, οὔτε ἄρτους μετὰ ἡμερῶν. Οἱ ἀριθμοὶ λοιπόν, τοὺς ὁποίους προσθέτομεν, ὑποθέτομεν ὅτι παριστῶσι πάντοτε ὅμοια πράγματα ἢ πράγματα, τῶν ὁποίων τὰς διαφορὰς παραβλέπομεν, οἷον μῆλα μεγάλα μὲ μικρά, ἢ κίτρινα μὲ ἐρυθρά, γέροντας καὶ νέους.

Σημ. β΄. Ὅταν δίδωται τὸ ὄνομα τῶν πραγμάτων, τὰ ὁποῖα παριστῶσιν οἱ ἀριθμοί, τότε λέγομεν τούτους *συγκεκριμένους*, οἷον 5 μῆλα, 7 πρόβατα κτλ. Ὅταν δὲ δὲν δίδωται τὸ ὄνομα τῶν πραγμάτων, τότε οἱ ἀριθμοὶ λέγονται *ἀφηρημένοι*, οἷον οἱ ἀριθμοὶ 1, 3, 5, διὰ τῶν ὁποίων δὲν ὁρίζεται τί πράγματα παριστῶσι.

Πρόσθεσις μονοψηφίων ἀριθμῶν.

18. Ἡ πρόσθεσις τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν γίνεται, ὅπως ἀνωτέρω εἴδομεν, ἂν λαμβάνωμεν, ὅταν οἱ ἀριθμοὶ εἶναι δύο, ἀνὰ μίαν τὰς μονάδας τοῦ μὲν καὶ προσθέτωμεν μετὰ τῶν μονάδων τοῦ δέ.

Τοιουτοτρόπως εὑρίσκομεν τὰ ἀθροίσματα πάντων τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν ἀνὰ δύο καὶ ἀποστηθίζομεν ταῦτα, ἵνα δυνάμεθα νὰ ἐκτελῶμεν εὐκόλως πᾶσαν πρόσθεσιν.

Ὅταν ἔχωμεν νὰ προσθέσωμεν πολλοὺς μονοψηφίους ἀριθμούς, προσθέτομεν πρῶτον δύο ἐξ αὐτῶν, εἰς τὸ ἄθροισμα δὲ τούτων προσθέτομεν τὸν τρίτον, εἰς τὸ νέον ἄθροισμα τὸν τέταρτον καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρι τοῦ τελευταίου. Ἐὰν π. χ. ἔχωμεν νὰ προσθέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 4, 2, 3, 6, προσθέτομεν πρῶτον τοὺς 4 καὶ 2 καὶ εὑρίσκομεν ἄθροισμα 6, εἰς τοῦτο προσθέτομεν καὶ τὸν 3 καὶ λαμβάνομεν τὸν 9, προσθέτοντες εἰς τὸ νέον τοῦτο ἄθροισμα καὶ τὸν τελευταῖον προσθετέον 6, εὑρίσκομεν ὁλικὸν ἄθροισμα 15.

Πρόσθεσις οἱωνδήποτε ἀριθμῶν.

19. Διὰ νὰ προσθέσωμεν δύο οἱουσδήποτε ἀριθμούς, προσθέτομεν πρῶτον τὰς ἁπλᾶς αὐτῶν μονάδας καὶ εὑρίσκομεν πόσας ἁπλᾶς μονάδας ἔχει τὸ ἄθροισμα, κατόπιν τὰς δεκάδας, τὰς ἑκατοντάδας καὶ καθεξῆς. Ἔστωσαν ὡς παράδειγμα οἱ ἀριθμοὶ 324, 232, 141, τῶν ὁποίων

ὁ 324	περιέχει	3 ἑκατοντάδας,	2 δεκάδας	καὶ 4 μονάδας
ὁ 232	»	2 »	3 »	» 2 »
ὁ 141	»	1 ἑκατοντάδα,	4 »	» 1 μονάδα.

τὸ ἄθροισμα θὰ περιέχῃ 6 ἑκατοντάδας, 9 δεκάδας καὶ 7 μονάδας, ἤτοι πάσας τὰς ἁπλᾶς μονάδας, πάσας τὰς δεκάδας καὶ πάσας τὰς ἑκατοντάδας τῶν δοθέντων.

Ἐν τῇ πράξει χωρὶς ν' ἀναλύσωμεν τοὺς προσθετέους γράφομεν αὐτοὺς τὸν μὲν κάτωθεν τοῦ δὲ οὕτως, ὥστε ὅλαι αἱ ἁπλαῖ μονάδες νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην, ἐπίσης καὶ αἱ δεκάδες καθὼς καὶ αἱ ἑκατοντάδες, καὶ ἐν γένει πᾶσαι αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως καὶ σύρομεν εὐθεῖαν ὑπὸ τοὺς προσθετέους.

$$\begin{array}{r} 324 \\ 232 \\ 141 \\ \hline 697 \end{array}$$

Μετὰ ταῦτα ἀρχόμενοι ἐκ τῶν ἁπλῶν μονάδων λέγομεν 1 μονὰς καὶ 2 κάμνουν 3 καὶ 4 κάμνουν 7 : ὥστε τὸ ἄθροισμα θὰ ἔχῃ 7 ἁπλᾶς μονάδας· προχωροῦντες εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων λέγομεν 4 δεκάδες καὶ 3 κάμνουν 7 καὶ 2 κάμνουν 9 δεκάδας τὸ ὅλον· ὁμοίως προσθέτοντες τὰς ἑκατοντάδας εὑρίσκομεν 6 τοιαύτας διὰ τὸ ἄθροισμα. Ἑπομένως τὸ ζητούμενον ἄθροισμα εἶναι ὁ ἀριθμὸς 697.

Ἔστω ἤδη πρὸς ἐκτέλεσιν ἡ πρόσθεσις

$$\begin{array}{r} 5\,792 \\ 327 \\ 7\,496 \\ 34 \\ \hline 13\,649 \end{array}$$

Προσθέτοντες τὰς ἁπλᾶς μονάδας εὑρίσκομεν 19. Τοῦ ἀριθμοῦ τούτου τὰς 9 μονάδας γράφομεν ὑπὸ τὴν εὐθεῖαν εἰς τὴν στήλην τῶν ἁπλῶν μονάδων, τὰς δὲ ἄλλας 10 τρέπομεν εἰς 1 δεκάδα καὶ προσθέτοντες εἰς τὰς δεκάδας εὑρίσκομεν ἐν συνόλῳ 24 δεκάδας· τούτων τὰς μὲν 4 γράφομεν ὑπὸ τὴν εὐθεῖαν εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων, τὰς δὲ ἑτέρας 20 τρέπομεν εἰς 2 ἑκατοντάδας καὶ προσθέτοντες μετὰ τῶν ἑκατοντάδων τῶν προσθετέων εὑρίσκομεν ἐν συνόλῳ 16 ἑκατοντάδας, ἐκ τῶν ὁποίων τὰς μὲν 6 γράφομεν ὑπὸ τὴν εὐθεῖαν εἰς τὴν στήλην τῶν ἑκατοντάδων, τὰς δὲ λοιπὰς 10 τρέπομεν εἰς 1 χιλιάδα καὶ προσθέτοντες ταύτην μετὰ τῶν χιλιάδων τῶν προσθετέων εὑρίσκομεν ἐν συνόλῳ 13 χιλιάδας, τὰς ὁποίας γράφομεν ὑπὸ τὴν εὐθεῖαν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τῶν εὑρεθεισῶν ἑκατοντάδων. Ὁ ἀριθμὸς 13 649 ὁ οὕτω προκύπτων εἶναι τὸ ζητούμενον ἄθροισμα, ὡς περιέχων πάσας τὰς μονάδας τῶν διαφόρων τάξεων τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Σημ. Τὴν πρόσθεσιν ἠρχίσαμεν ἐκ τῶν δεξιῶν, διότι, ἂν τοὐναντίον ἀρχίσωμεν ἐκ τῶν ἀριστερῶν, θέλομεν εὕρῃ 12 χιλ., κατόπιν προσθέτοντες τὰς ἑκατοντάδας εὑρίσκομεν 14 τοιαύτας· τούτων τὰς 10 τρέπομεν εἰς 1 χιλ. καὶ προσθέτοντες εἰς τὰς 12 χιλιάδας εἴμεθα ἠναγκασμένοι νὰ ἀπαλείψωμεν ταύτας καὶ νὰ γράψωμεν 13· τὸ αὐτὸ δύναται νὰ συμβαίνῃ καὶ εἰς τὰς μονάδας τῶν κατωτέρων τάξεων. Ἵνα λοιπὸν ἀποφεύγωμεν τὴν τοιαύτην ἀπαλοιφὴν καὶ ἀναγραφήν, ἀρχόμεθα τῆς πράξεως πάντοτε ἐκ δεξιῶν.

20. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα:

Κανών. *Ἵνα προσθέσωμεν πολλοὺς πολυψηφίους* ***ἀριθμούς,*** *γράφομεν τὸν μὲν κάτωθι τοῦ δὲ οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες νὰ εὑρίσκωνται ὑπὸ τὰς μονάδας, αἱ δεκάδες ὑπὸ τὰς δεκάδας καὶ ἐν γένει αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως εἰς τὴν αὐτὴν κατακόρυφον στήλην καὶ ἄγομεν εὐθεῖαν κάτωθι, διὰ νὰ ἀποχωρισθῶσιν οἱ προσ-*

θετέοι τοῦ ἀθροίσματος, τὸ ὁποῖον θὰ γραφῇ ὑποκάτω τῆς εὐθείας γραμμῆς· ἔπειτα προσθέτομεν χωριστὰ τὰ ψηφία ἑκάστης στήλης ἀρχόμενοι ἐκ τῶν ἁπλῶν μονάδων. Ἂν τὸ ἄθροισμα τούτων δὲν εἶναι μεγαλείτερον τοῦ 9, γράφομεν αὐτὸ ὑποκάτω τῶν προσθετέων, ἐκ τῶν ὁποίων προέκυψεν· ἂν ὅμως εἶναι μεγαλείτερον τοῦ 9, ὁπότε θὰ ἔχῃ δεκάδας καὶ μονάδας, τὸ μὲν ψηφίον τῶν μονάδων αὐτοῦ γράφομεν ὑπὸ τὴν στήλην τῶν προσθετέων, τὸ δὲ ψηφίον τῶν δεκάδων προσθέτομεν εἰς τὰς μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως· οὕτως ἐξακολουθοῦμεν μέχρι τῆς τελευταίας πρὸς τὰ ἀριστερὰ στήλης, τῆς ὁποίας τὸ ἄθροισμα γράφομεν ὑπ' αὐτὴν ὁλόκληρον.

21. **Εὐκολίαι.** Ὅταν οἱ προσθετέοι εἶναι πολλοὶ καὶ πολυψήφιοι ἀριθμοί, τότε γράφομεν τὰ μερικὰ ἀθροίσματα τὸ μὲν κάτωθι τοῦ δέ, ὡς φαίνεται κατωτέρω ἐν τῷ πρώτῳ παραδείγματι·

Παράδειγμα α'

57936	
69768	
5942	
7384	
56675	
6710	
409	
98	
42	
38	
45	μερικὰ ἀθροίσματα.
40	
16	
204922	ὁλικὸν ἄθροισμα.

Παράδειγμα β'

(4) (4) (4) (4)
57936
69768
5942
7384
56675
6710
409
98
204922

Παράδειγμα γ'

57 936	
69 768	
5 942	
7 384	
56 675	197705
6 710	
409	
7 713	
85 078	
56 208	156 118
40 912	
70 019	
6 793	
899	118 623
ὁλικὸν ἄθροισμα	472 446

ἢ τὰς μὲν μονάδας ἑκάστου μερικοῦ ἀθροίσματος γράφομεν ὡς συνήθως ὑπὸ τὴν στήλην, ἐξ ἧς προέκυψε, τὰ δὲ κρατούμενα γράφομεν ὑπεράνω τῆς ἀμέσως ἑπομένης στήλης, ἵνα ἐκεῖ προστεθῶσιν, ὡς φαίνεται ἐν τῷ δευτέρῳ παραδείγματι. Εἰς τὰ λογιστικὰ βιβλία, ὅπου οἱ προσθετέοι εἶναι παρὰ πολλοί, προσθέτουσιν αὐτοὺς ἀνὰ πέντε καὶ ἔπειτα εὑρίσκουσι τὸ ὁλικὸν ἄθροισμα ὅλων τῶν μερικῶν τούτων ἀθροισμάτων, ὡς φαίνεται ἐν τῷ τρίτῳ παραδείγματι.

Βάσανος τῆς προσθέσεως.

22. Ἡ βάσανος τῆς προσθέσεως γίνεται διὰ τῆς ἐπαναλήψεως τῆς πράξεως κατ' ἀντίστροφον τάξιν, δηλ. ἂν ἐπροσθέσαμεν λαμβάνοντες τὰ ψηφία ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω, ἐπαναλαμβάνομεν τὴν πρᾶξιν προσθέτοντες ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω, ὁπότε πρέπει, ἂν ἡ πρᾶξις ἐγένετο ὀρθῶς, νὰ εὕρωμεν τὸ αὐτὸ ἄθροισμα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

23. **Πρόβλ. α'.** Ἐὰν ἔχῃ τις 8 φράγκα καὶ πληρώσῃ διὰ χρέος 3, *πόσα τῷ μένουν;*

Λύσις. Ἐκ τῶν 8 φρ., τὰ ὁποῖα εἶχε, πληρώνει κατὰ πρῶτον 1 καὶ τῷ μένουν 7, χρέος δὲ 2· ἔπειτα πληρώνει ἄλλο 1 καὶ τῷ μένουν 6 καὶ χρέος 1· τέλος πληρώνει καὶ τοῦτο, ὁπότε τῷ μένουν 5 φρ. ἄνευ χρέους.

Πρόβλ. β'. Πατήρ τις ἔδωκεν εἰς τὸ τέκνον του 6 μῆλα καὶ διέταξε νὰ δώσῃ εἰς τὸν ἀδελφόν του 2. *Πόσα θὰ τῷ μένουν;*

Λύσις. Ἀφοῦ πρῶτον δώσῃ 1, θὰ τῷ μένουν 5, καὶ ὅταν δώσῃ καὶ τὸ ἄλλο 1, τῷ μένουν 4 μῆλα.

Ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας ἠλαττώσαμεν τὰ 8 φράγκα κατὰ 3 φρ. καὶ τὰ 6 μῆλα κατὰ 2, λέγεται *ἀφαίρεσις*. Ὅθεν

24. *'Αφαίρεσις λέγεται ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας ἐλαττώνομεν δοθέντα ἀριθμὸν κατὰ τόσας μονάδας, ὅσας ἔχει ἄλλος τις δοθεὶς ἀριθμός.*

Ὁ ἀριθμός, ὅστις πρόκειται νὰ ἐλαττωθῇ, λέγεται *μειωτέος*, ὁ δὲ ἄλλος, ὅστις δεικνύει κατὰ πόσας μονάδας θὰ ἐλαττωθῇ ὁ πρῶτος, λέγεται *ἀφαιρετέος*, καὶ ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος μένει μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς πράξεως, λέγεται *διαφορὰ* ἢ *ὑπόλοιπον*.

Εἰς τὰ ἀνωτέρω προβλήματα, ἐὰν εἰς τὰ 5 φρ., τὰ ὁποῖα ἔμειναν (διαφορά), προσθέσωμεν καὶ τὰ 3, τὰ ὁποῖα ἐπληρώσαμεν (ἀφαιρετέος), προκύπτουσι τὰ 8, τὰ ὁποῖα ἐξ ἀρχῆς εἴχομεν (μειωτέος). Ἐπίσης, ἐὰν εἰς τὰ 4 μῆλα, τὰ ὁποῖα ἔμειναν εἰς τὸν παῖδα (διαφορά), προσθέσωμεν καὶ τὰ 2, τὰ ὁποῖα ἔδωκεν εἰς τὸν ἀδελφόν του (ἀφαιρετέος), εὑρίσκομεν 6, ἤτοι ὅσα ἔλαβε παρὰ τοῦ πατρός του (μειωτέος). Τοῦτο συμβαίνει πάντοτε, διότι εἰς τὰς μονάδας, τὰς ὁποίας ἀφαιροῦμεν, ἐὰν προσθέσωμεν καὶ ἐκείνας, αἱ ὁποῖαι μένουν, θὰ ἔχωμεν τὰς δοθείσας. Ἐκ τούτων ἕπεται, ὅτι

Εἰς πᾶσαν ἀφαίρεσιν ὁ μειωτέος εἶναι ἄθροισμα τοῦ ἀφαιρετέου καὶ τῆς διαφορᾶς.

Ὅταν θέλωμεν νὰ σημειώσωμεν, ὅτι ἀπὸ ἀριθμοῦ τινος πρέπει νὰ ἀφαιρεθῇ ἄλλος, θέτομεν μεταξὺ αὐτῶν τὸ σημεῖον —, τὸ ὁποῖον λέγεται *μεῖον* ἢ *πλήν*· π. χ. 9—5 σημαίνει, ὅτι ἀπὸ τὸν 9 θὰ ἀφαιρέσωμεν 5 καὶ ἀπαγγέλλεται *ἐννέα πλὴν* ἢ *μεῖον πέντε*.

Σημ. 1η. Διὰ νὰ εἶναι ἡ ἀφαίρεσις πάντοτε δυνατή, πρέπει ὁ μειωτέος νὰ εἶναι μεγαλείτερος τοῦ ἀφαιρετέου· διότι, ἂν ὁ μειωτέος εἶναι μικρότερος, εἶναι ἀδύνατον νὰ ἐξαγάγωμεν ἀπὸ αὐτὸν περισσοτέρας μονάδας ἀπὸ ὅσας ἔχει, καὶ τότε ἡ πρᾶξις εἶναι ἀδύνατον νὰ ἐκτελεσθῇ.

Σημ. 2α. Ἐπίσης διὰ νὰ εἶναι δυνατὸν ἀπὸ ἀριθμοῦ τινος νὰ ἀφαιρεθῇ ἄλλος, πρέπει οἱ ἀριθμοί, ἂν εἶναι συγκεκριμένοι, νὰ παριστῶσιν ὅμοια πράγματα, διότι εἶναι ἀδύνατον ἀπὸ μῆλα νὰ ἀφαιρέσωμεν πρόβατα καὶ ἀπὸ ὀκάδας νὰ ἀφαιρέσωμεν πήχεις.

Ἀφαίρεσις μονοψηφίου ἀπὸ ἄλλον ἀριθμόν.

25. Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀριθμὸν μονοψήφιον ἀπὸ ἄλλον, ἀφαιροῦμεν, καθὼς ἀνωτέρω εἴδομεν, ἀνὰ μίαν τὰς μονάδας τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τῶν μονάδων τοῦ μειωτέου. Πρὸς εὔκολον δὲ ἐκτέλεσιν πάσης ἀφαιρέσεως, ἀφοῦ κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον εὕρωμεν ὅλας τὰς μονοψηφίους διαφορὰς τῶν ἀριθμῶν τοὐλάχιστον μέχρι τοῦ 20, ἀποστηθίζομεν ταύτας. Οὕτω λέγομεν 7 ἀπὸ 16 δίδει 9, 5 ἀπὸ 12 δίδει 7.

Τὴν ἀφαίρεσιν, ὅταν ἡ διαφορὰ εἶναι μονοψήφιος, δυνάμεθα εὐκόλως νὰ ἐκτελῶμεν διὰ τῆς προσθέσεως, ἐὰν εὑρίσκωμεν ποῖος ἀριθμὸς προστιθέμενος εἰς τὸν ἀφαιρετέον δίδει τὸν μειωτέον. Οὕτως, ἐὰν ἔχωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ 14 τὸν 8, διαφορὰ εἶναι 6, διότι ὁ ἀριθμὸς οὗτος προστιθέμενος εἰς τὸν ἀφαιρετέον 8, δίδει τὸν μειωτέον 14. Ἐπίσης 12 - 9 δίδει 3, διότι 9 + 3 κάμνει 12.

* Ἰδιότητες τῆς ἀφαιρέσεως.

26. **Παράδειγμα α΄.** Ὅταν ἔχωμεν εἰς τρία μέρη χωριστὰ 15 φράγκα καὶ ἄλλα 8 καὶ ἄλλα 9, ἤτοι τὸ ὅλον 32 φρ. καὶ πρόκηται νὰ πληρώσωμεν 6, δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ταῦτα ἀδιαφόρως, ἢ ἀπὸ τὰ 15 ἢ ἀπὸ τὰ 8 ἢ ἀπὸ τὰ 9. Καὶ κατὰ τὰς τρεῖς ταύτας περιπτώσεις εἶναι φανερόν, ὅτι τὰ χρήματά μας θὰ ἐλαττωθῶσι κατὰ τὰ 6 φρ., τὰ ὁποῖα ἐπληρώσαμεν. Τοῦτο ἐκφράζομεν ὡς ἑξῆς:

Ἐὰν ἀπὸ ἀθροίσματος, οἷον 15 + 8 + 9, πρόκηται νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα, ἔστω τὸν 6, ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν τοῦτον ἀπὸ ἕνα οἱονδήποτε τῶν προσθετέων.

27. **Παράδειγμα β΄.** Ἐὰν ἔχωμεν ἀπὸ τὰ 15 + 8 + 9 φρ. νὰ πληρώσωμεν 6 φράγκα, ἀλλὰ πρόκειται νὰ πληρώσωμεν 4 εἰς ἕνα καὶ 2 εἰς ἄλλον, δυνάμεθα τὰ μὲν 4 νὰ λάβωμεν ἀπὸ τὰ 15, τὰ δὲ 2 ἀπὸ τὰ 8· εἶναι δὲ φανερόν, ὅτι τὰ χρήμα-

τά μας θὰ ἐλαττωθῶσι κατὰ τὰ 4 καὶ κατὰ τὰ 2 φρ., ἤτοι πάλιν κατὰ 6 φρ.

Ἑπομένως, *ἐὰν δύο ἀριθμοὶ εἶναι χωρισμένοι εἰς μέρη, ὡς οἱ* $15+8+9$ *καὶ* $4+2$, *καὶ πρόκηται νὰ ἀφαιρέσωμεν αὐτούς, ἀρκεῖ ἀπὸ τοῦ μειωτέου νὰ ἀφαιρέσωμεν ἕκαστον μέρος τοῦ ἀφαιρετέου.*

28. **Παράδειγμα γ΄.** Ἔστω ἀπὸ 9 νὰ ἀφαιρέσωμεν 4. Κατὰ τὰ γνωστά, ἀπὸ τοῦ 9 θὰ ἀφαιρέσωμεν ἀνὰ μίαν ὅλας τὰς μονάδας τοῦ 4 καὶ θὰ εὕρωμεν 5. Ἂν εἰς τὸν 9 προσθέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 3 καὶ εἰς τὸν 4 τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, θὰ ἔχωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ $9+3$ τὸν $4+3$. Ἀρχίζοντες τὴν ἀφαίρεσιν ταύτην ἀφαιροῦμεν ἀνὰ μίαν τὰς 3 μονάδας τοῦ ἀφαιρετέου $4+3$ ἀπὸ τὰς τοῦ μειωτέου καὶ τότε θὰ μένῃ ἀπὸ τὰς 9 τοῦ μειωτέου νὰ ἀφαιρέσωμεν τὰς ἐπιλοίπους 4, ὁπότε θὰ ἔχωμεν τὴν αὐτὴν καὶ πρότερον διαφοράν. Ἑπομένως,

Ἂν εἰς τὸν μειωτέον καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον προστεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμός, ἡ διαφορὰ δὲν μεταβάλλεται.

Ὡσαύτως φαίνεται, ὅτι ἡ διαφορὰ δὲν μεταβάλλεται, ἂν συγχρόνως ἀπὸ τὸν μειωτέον καὶ τὸν ἀφαιρετέον ἀφαιρέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Ἀφαίρεσις δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν.

29. Ἂν πρόκηται νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 5 672 τὸν 3 461, ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ εἶναι κεχωρισμένοι εἰς μονάδας διαφόρων τάξεων, ἀρκεῖ πρὸς εὐκολίαν νὰ ἀφαιρέσωμεν τὰ μέρη τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὰ μέρη τοῦ μειωτέου κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον· τὰς μονάδας ἀπὸ τὰς μονάδας, τὰς δεκάδας ἀπὸ τὰς δεκάδας καὶ καθεξῆς.

Πρὸς τοῦτο γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον ὑποκάτω τοῦ μειωτέου, ὅπως καὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν.

$$\begin{array}{r} 5\,897 \\ 3\,461 \\ \hline 2\,436 \end{array}$$

Ἔπειτα γράφομεν ὑποκάτω εὐθεῖαν καὶ ἀρχίζοντες ἀπὸ τὰς ἁπλᾶς μονάδας λέγομεν 1 τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ 7 τοῦ μειωτέου μένουν 6· τοῦτον γράφομεν ὑπὸ τὴν εὐθεῖαν εἰς τὴν στήλην τῶν μονάδων· μετὰ τοῦτο ἀφαιροῦμεν τὰς 6 δεκάδας τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὰς 9 τοῦ μειωτέου καὶ μένουν 3· ταύτας γράφομεν εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων κάτωθι τῆς εὐθείας. Ἐπίσης ἀπὸ τὰς ἑκατοντάδας εὑρίσκομεν μερικὸν ὑπόλοιπον 4 ἑκατοντάδας καὶ ἀπὸ τὰς χιλιάδας 2 χιλιάδας.

Οὕτως εὕρομεν, ὅτι οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ ἔχουν διαφορὰν 2 436.

Ἄς ἀφαιρεθῇ ἤδη ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 7 393 ὁ 4 576.

Ἐνταῦθα αἱ 6 μονάδες τοῦ ἀφαιρετέου δὲν ἀφαιροῦνται ἀπὸ τὰς 3 τοῦ μειωτέου· διὰ νὰ γίνῃ ἡ ἀφαίρεσις δυνατή, προσθέτομεν εἰς τὸν μειωτέον 10 μονάδας, αἱ ὁποῖαι μετὰ τῶν 3 γίνονται 13, καὶ τότε ἀφαιροῦμεν 6 μονάδας τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ 13 τοῦ μειωτέου καὶ εὑρίσκομεν 7. Ἐπειδὴ ἐπροσθέσαμεν 10 μονάδας εἰς τὸν μειωτέον, ἵνα μὴ μεταβληθῇ ἡ διαφορά, προσθέτομεν καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον 10 μονάδας, ἤτοι 1 δεκάδα, καὶ οὕτω θὰ ἔχωμεν 1 δεκάδα καὶ 7 δεκάδας, τὸ ὅλον 8 δεκάδας τοῦ ἀφαιρετέου νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ 9 δεκάδας τοῦ μειωτέου, εὑρίσκομεν δὲ διαφορὰν 1 δεκάδα. Μεταβαίνομεν ἔπειτα εἰς τὰς ἑκατοντάδας· ἐπειδὴ αἱ 5 ἑκατοντάδες τοῦ ἀφαιρετέου δὲν ἀφαιροῦνται ἀπὸ τὰς 3 ἑκατοντάδας τοῦ μειωτέου, προσθέτομεν εἰς τοῦτον 10 ἑκατοντάδας καὶ θὰ ἔχωμεν μετὰ τῶν 3 ἑκατοντάδων τὸ ὅλον 13 τοιαύτας, ἀπὸ τὰς ὁποίας ἀφαιροῦντες 5 ἑκατοντάδας εὑρίσκομεν διαφορὰν 8 ἑκατοντάδας· ἀλλὰ διὰ νὰ μὴ μεταβληθῇ ἡ ὁλικὴ διαφορά, ἀφοῦ εἰς τὸν μειωτέον ἐπροσθέσαμεν 10 ἑκατοντάδας, προσθέτομεν τόσας καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον, ἀφοῦ τρέψωμεν ταύτας εἰς 1 χιλιάδα, καὶ οὕτω θὰ ἔχωμεν 1 χιλιάδα καὶ 4 τὸ ὅλον 5 χιλ., ἀπὸ 7 χιλ. τοῦ μειωτέου μένουν τὸ ὅλον 2 χιλ. Ὁ ἀριθμὸς 2 817 εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν δύο δοθέντων.

$$\begin{array}{r} 7\,393 \\ \underline{4\,576} \\ 2\,817 \end{array}$$

Σημ. Τὴν ἀφαίρεσιν ἀρχίζομεν πάντοτε ἐκ δεξιῶν, ὅπως καὶ τὴν πρόσθεσιν, διὰ λόγους, τοὺς ὁποίους τότε ἀνεφέραμεν.

30. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται ὁ ἑξῆς κανὼν τῆς ἀφαιρέσεως.

Κανών. *Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν δύο ἀριθμούς, γράφομεν τὸν* *ἀφαιρετέον ὑπὸ τὸν μειωτέον οὕτως, ὥστε τὰ ψηφία τῶν μονάδων τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην· ἔπειτα ἄγομεν ὑποκάτω εὐθεῖαν καὶ ἀρχίζοντες ἀπὸ τὰς ἁπλᾶς μονάδας ἀφαιροῦμεν ἕκαστον ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὸ ἀντίστοιχον τοῦ μειωτέου καὶ τὸ ἐξαγόμενον γράφομεν ὑποκάτω τῆς εὐθείας εἰς τὴν αὐτὴν στήλην. Ἐὰν συμβῇ ψηφίον τι τοῦ ἀφαιρετέου νὰ εἶναι μεγαλείτερον τοῦ ἀντιστοιχοῦντος ψηφίου τοῦ μειωτέου, προσθέτομεν εἰς τοῦτο 10 μονάδας τῆς αὐτῆς τάξεως καὶ ἐκτελοῦμεν τὴν ἀφαίρεσιν, ἀλλὰ κατόπιν ἐξακολουθοῦντες πρέπει νὰ αὐξάνωμεν κατὰ 1 τὸ ἀμέσως πρὸς τὰ ἀριστερὰ ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου. Τὰ ψηφία τὰ εὑρισκόμενα διὰ τῶν μερικῶν τούτων ἀφαιρέσεων εἶναι τὰ ψηφία τῆς ζητουμένης διαφορᾶς.*

Βάσανος τῆς ἀφαιρέσεως.

31. Ἐμάθομεν ὅτι, ἐὰν εἰς τὸν ἀφαιρετέον προσθέσωμεν τὴν διαφοράν, εὑρίσκομεν τὸν μειωτέον. Ὅταν λοιπὸν θέλωμεν νὰ δοκιμάσωμεν, ἂν ἡ ἀφαίρεσις εἶναι ἀκριβής, προσθέτομεν τὴν διαφορὰν εις τὸν ἀφαιρετέον καί, ἂν εὕρωμεν τὸν μειωτέον, συμπεραίνομεν ὅτι ἡ ἀφαίρεσις ἐγένετο ἄνευ λάθους.

Προβλήματα.

Εἰς τὰ κατωτέρω προβλήματα τὰς πράξεις ἐπὶ μονοψηφίων καὶ διψηφίων καί, εἰ δυνατόν, ἐπὶ τριψηφίων πρέπει νὰ ἐκτελῶσιν οἱ μαθηταὶ κατὰ διάνοιαν

1) Ὅταν ἀγοράσῃ τις ἐμπορεύματα 45 φράγκων καὶ πληρώσῃ μόνον 18, *πόσα ὑπολείπονται πρὸς ἀποπληρωμήν;* Ἀπ. 27 φρ.

2) Ἔμπορος ἠγόρασεν ὕφασμα ἀντὶ 70 γροσίων, μετεπώλησε δὲ τοῦτο εἰς δύο τεμάχια, τὸ ἓν ἀντὶ 60 γροσίων καὶ τὸ ἄλλο ἀντὶ 37 γροσίων· *πόσα ἐκέρδησεν;* Ἀπ. 27 γρόσ.

3) Ἔμπορός τις ἔχει εἰς τὸ χρηματοκιβώτιόν του 350 φρ. Ἐκ τούτων πληρώνει τοὺς τρεῖς ὑπαλλήλους του, καὶ εἰς τὸν μὲν δίδει 50 φρ, εἰς τὸν δεύτερον 75 καὶ εἰς τὸν τρίτον 45· *πόσα φράγκα τῷ μένουν;* Ἀπ. 180. φρ.

4) Ἄνθρωπός τις εἰσπράττει ἐξ ἐνοικίου τῆς οἰκίας του 70 φρ. κατὰ μη-

να, ἐκ τῆς ἐργασίας του 95 φρ. καὶ ἐξ ἄλλων τινῶν εἰσοδημάτων 150 φρ., δαπανᾷ δὲ τὸ ὅλον κατὰ μῆνα 230 φρ. *πόσα τῷ μένουν;* Ἀπ. 85 φρ.,

5) Σιτέμπορος ἐπώλησε 56 765 χιλιόγραμμα σίτου, τὸν ὁποῖον ἀπέστειλεν εἰς δόσεις· ἡ πρώτη ἀποστολὴ συνέκειτο ἐκ 5 672 χγ., ἡ δευτέρα ἐξ 7 562 καὶ ἡ τρίτη ἐκ 4 765. *Πόσα χιλιόγρ. ὑπολείπονται ν' ἀποσταλῇ;* Ἀπ. 38 766.

6) Ὅταν ἡ μεσημβρία συμπέσῃ τὴν 6 ὥραν τουρκιστί, *πρὸς ποίαν τουρκικὴν ὥραν ἀντιστοιχοῦσιν* ἡ 5 μ. μ. καὶ ἡ 9 πρωϊνὴ εὐρωπαϊκή;

Ἀπ. α' πρὸς τὴν 11 τῆς ἑσπέρας, β' πρὸς τὴν 3 πρωϊνήν.

7) Κατὰ τὴν αὐτὴν ἡμέραν πρὸς ποίας εὐρωπαϊκὰς ὥρας ἀντιστοιχοῦσιν αἱ 2, 5, 7, 11 τουρκικαὶ ὧραι τῆς ἡμέρας;

8) Νὰ λυθῶσι τὸ 6 καὶ 7 πρόβλημα, καθ' ἣν περίπτωσιν ἡ μεσημβρία συμπίπτει πρὸς τὴν 7ην τουρκ. ὥραν, ὡς καὶ πρὸς τὴν 4ην τουρκ.

9) Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, ὅστις διαφέρει τοῦ 567 κατὰ 152.

Ἀπ. ὁ 719 καὶ ὁ 415.

10) Γυνὴ 22 ἐτῶν ἐγέννησεν υἱόν· σήμερον ὁ υἱὸς εἶναι 37 ἐτῶν. *Πόσων ἐτῶν εἶναι ἡ μήτηρ, κατὰ ποῖον ἔτος ἐγεννήθη αὕτη καὶ κατὰ ποῖον ἔτος ἐγέννησε τὸν υἱόν της;* Ἀπ. ἡ μήτηρ εἶναι 59 ἐτῶν.

11) Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, ὅστις ἀφαιρούμενος ἀπὸ τοῦ 3 754 νὰ δίδῃ διαφοράν, τῆς ὁποίας ὅλα τὰ ψηφία εἶναι ὅμοια.

Ἀπ. 2 643 (ὑπάρχουσι καὶ ἄλλοι τρεῖς· νὰ εὑρεθῶσι).

12) Ἔμπορός τις εἶπε: Τὸ ἐμπόρευμά μου, τὸ ὁποῖον ἐπώλησα, μοὶ ἐστοίχισε 370 γρόσ. Ἂν δὲ τὸ ἐπώλουν 30 γρόσ. περισσότερον, θὰ ἐκέρδιζα 75 γρόσ. *Πόσον ἐπώλησα τὸ ἐμπόρευμα;* Ἀπὸ 415 γρόσ.

13) Ἡ τουρκικὴ λίρα ἔχει 108 γρόσ., τὸ δὲ εἰκοσάφραγκον 95 γρόσ. Μία λίρα τουρκικὴ καὶ δύο εἰκοσάφραγκα. *Πόσα γρόσια κάμνουν;* Ἀπ. 298.

14) Κατὰ τὴν πρώτην τοῦ ἔτους ὁ πατὴρ ἔδωκεν εἰς τὸν υἱὸν μίαν λίραν ἀγγλικήν, ἥτις ἔχει 120 γρόσ., ἡ μήτηρ μίαν τουρκικήν, ὁ θεῖος ἓν εἰκοσάφραγκον, ὁ μεγαλείτερος ἀδελφὸς μίαν κριμίτσαν, ἥτις ἔχει 56 γρόσ. Τὸ παιδίον ἐκ τούτων ἐδαπάνησε 250 γρόσ. πρὸς ἀγορὰν μιᾶς ἐνδυμασίας. *Πόσα γρόσια τῷ ἔμειναν;* Ἀπ. 129.

15) Βαρέλιον πλῆρες ἐλαίου ἔχει βάρος 520 χγ., τὸ δὲ βαρέλιον μόνον ἔχει βάρος (ἀποστάθμην, κοινῶς ντάραν) 60 χγ. *Πόσον εἶναι τὸ βάρος τοῦ ἐλαίου;* Ἀπ. 460 χγ.

16) Διὰ βιβλίον, τὸ ὁποῖον μᾶς ἀπέστειλαν ἐξ Ἀθηνῶν, ὀφείλομεν νὰ

πληρώσωμεν διὰ ταχυδρομικὰ καὶ δι' ἀξίαν τοῦ βιβλίου 28 φρ., τὰ γραμματόσημα παρατηροῦμεν ὅτι ἔχουν ἀξίαν 3 φρ. *Πόση εἶναι ἡ πραγματικὴ ἀξία τοῦ βιβλίου;* 'Απ. 25 φρ.

17) 'Αργυραμοιβὸς ἤρχισε τὴν ἐργασίαν του μὲ 2 352 φρ., μετὰ ἓν ἔτος εἶπεν ὅτι, ἂν ἐκέρδιζεν 135 φρ. ἀκόμη, θὰ εἶχε κέρδος ἴσον πρὸς τὰ χρήματα, μὲ τὰ ὁποῖα ἤρχισε τὴν ἐργασίαν. *Πόσα φρ. ἐκέρδησεν;* 'Απ. 2 217.

18) Ἔμπορος ἠγόρασεν ἐμπορεύματα 5 769 φρ., ἀφοῦ δὲ ἐπώλησε ταῦτα, εἶπεν ὅτι, ἂν ἐκέρδιζε καὶ ἄλλα 175 φρ., θὰ ἐλάμβανε τὸ ὅλον 6 732 φρ. *Ποσα φρ. ἐκέρδησεν;* 'Απ. 788.

19) Οἰκογενειάρχης ἠγόρασε τρόφιμα ἀξίας 9 γροσίων, ἔδωκε δὲ πρὸς πληρωμὴν μίαν κριμίτσαν. *Πόσα γρ. θὰ τῷ ἐπιστρέψωσιν;* 'Απ. 47.

20) Ὁ αὐτὸς οἰκογενειάρχης ἠγόρασε μὲ 115 γρ. ὕφασμα δι' ἐνδυμασίαν, ἔδωκε δὲ εἰς τὸν ἔμπορον ἓν εἰκοσάφραγκον καὶ μίαν κριμίτσαν. *Πόσα γρ. θὰ τῷ ἐπιστρέψῃ ὁ ἔμπορος;* 'Απ. 36.

21) Ἂν ὁ αὐτὸς κύριος ἔδιδεν εἰς τὸν ἔμπορον ἡμίσειαν ἀγγλικὴν λίραν, ἥτις ἔχει 60 γρόσ. καὶ μίαν τουρκ. λίραν, *Πόσα γρ. θὰ τῷ ἐπέστρεφεν ὁ ἔμπορος;* 'Απ. 53.

22) Ῥάπτης εἶχεν 25 πήχεις ὑφάσματος, ἐκ τούτου κατεσκεύασε δύο ἐνδυμασίας· διὰ τὴν μίαν ἐχρειάσθη 5 πήχεις διὰ δὲ τὴν ἄλλην 8 πήχεις. *Πόσοι πήχεις ὑφάσματος τοῦ μένουν;* 'Απ. 12.

23) Κύριός τις ἔχει 800 γρόσ. Ἐκ τούτων ἐπλήρωσε τοὺς τρεῖς ὑπηρέτας αὐτοῦ· εἰς τὸν πρῶτον ἔδωκε 350 γρόσ., εἰς τὸν δεύτερον 180 γρόσ., ἔπειτα ἐπλήρωσε καὶ τὸν τρίτον καὶ ἀπέμειναν εἰς αὐτὸν 117 γρόσια. *Πόσα γρόσια ἔδωκεν εἰς τὸν τρίτον ὑπηρέτην;* 'Απ. 153.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

32. **Πρόβλ. α΄.** Ἐὰν ὁ πῆχυς ὑφάσματος τιμᾶται 5 γρ., πόσον τιμῶνται οἱ 4 πήχεις;

Λύσις. Ἀφοῦ ὁ εἷς πῆχυς τιμᾶται 5 γρ., οἱ δύο θὰ τιμῶνται $5+5$, οἱ τρεῖς $5+5+5$ καὶ οἱ τέσσαρες $5+5+5+5$, ἤτοι 20 γρόσ.

Πρόβλ. β΄. Ἐργάτης λαμβάνει ἡμερομίσθιον 4 φράγκα· *πόσα θὰ λάβῃ εἰς μίαν ἑβδομάδα;*

Λύσις. Ἐπειδὴ εἰς μίαν ἡμέραν λαμβάνει 4 φρ., εἰς δύο θὰ λάβῃ $4+4$, εἰς τρεῖς ἡμέρας θὰ λάβῃ $4+4+4$ καὶ οὕτω καθεξῆς εἰς 6 ἡμέρας θὰ λάβῃ $4+4+4+4+4+4$, ἤτοι 24 φρ.

Ἡ ἐπανάληψις αὕτη τοῦ ἀριθμοῦ 5 τετράκις καὶ τοῦ 4 ἑξάκις λέγεται *πολλαπλασιασμός*. Ὅθεν

33. *Πολλαπλασιασμὸς λέγεται ἡ πρόσθεσις, εἰς τὴν ὁποίαν πάντες οἱ προσθετέοι εἶναι ἴσοι.*

Ὁ ἀριθμός, πρὸς τὸν ὁποῖον εἶναι ἴσοι οἱ προσθετέοι, λέγεται *πολλαπλασιαστέος*, ἐκεῖνος δέ, ὅστις δεικνύει ποσάκις πρέπει νὰ ληφθῇ ὁ πολλαπλασιαστέος, λέγεται *πολλαπλασιαστής*, καὶ οἱ δύο ὁμοῦ *παράγοντες*. Ὁ ἀριθμὸς δέ, τὸν ὁποῖον εὑρίσκομεν, λέγεται *γινόμενον*.

Τὸ γινόμενον, καθὼς βλέπομεν, *εἶναι ἄθροισμα πολλῶν ἴσων ἀριθμῶν*.

Τὸ γινόμενον $5+5+5+5$ συντόμως γράφεται 5×4 καὶ ἀπαγγέλλεται 5 *ἐπὶ* 4. Ἐνταῦθα ὁ 5 εἶναι πολλαπλασιαστέος, ὁ 4 πολλαπλασιαστής, τὸ δὲ σύμβολον $\times$ εἶναι σημεῖον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ λέγεται *ἐπί*, τίθεται δὲ πάντοτε μεταξὺ τῶν δύο παραγόντων. Ἐπίσης τὸ ἄθροισμα $4+4+4+4+4+4$ γράφεται συντόμως 4×6 καὶ ἀπαγγέλλεται 4 ἐπὶ 6.

Εἰς τὸ γινόμενον 5×4, ἤτοι $5+5+5+5$, ὁ πολλαπλασιαστέος λαμβάνεται τέσσαρας φοράς, δηλ. τόσας φοράς, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ πολλαπλασιαστὴς 4· ἐπίσης τὸ γινόμενον 4×6, ὅπερ εἶναι $4+4+4+4+4+4$, περιέχει τὸν πολλαπλασιαστέον 4 ἕξ φοράς, δηλ. τόσας φοράς, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ πολλαπλασιαστὴς 6.

34. Ἐκ τούτου δυνάμεθα νὰ δώσωμεν τὸν ἑξῆς γενικώτερον ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ:

Πολλαπλασιασμὸς λέγεται ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας, δοθέντων δύο ἀριθμῶν, σχηματίζομεν ἐκ τοῦ πρώτου τρίτον ἀριθμόν, ὅπως ὁ δεύτερος ἐσχηματίσθη ἐκ τῆς ἀκεραίας μονάδος.

Σημ. Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστέος εἶναι ἀριθμὸς συγκεκριμένος, τὸ γινόμενον, ἐπειδὴ γίνεται ἐκ τοῦ πολλαπλασιαστέου, εἶναι πάντοτε ὁμοειδὲς πρὸς αὐτόν. Ὁ πολλαπλασιαστής, ἐπειδὴ δεικνύει πῶς θὰ σχηματισθῇ τὸ γινόμενον, δύναται πάντοτε νὰ θεωρῆται ὡς ἀφῃρημένος ἀριθμός. Διὰ τοῦτο κυρίως *παράγων* θεωρεῖται ὁ πολλαπλασιαστέος, ὁ δὲ πολλαπλασιαστὴς *ὁδηγός*, διότι ὁδηγεῖ πῶς πρέπει ἐκ τοῦ πολλαπλασιαστέου νὰ σχηματίσωμεν τὸ γινόμενον.

Πολλαπλασιασμὸς μονοψηφίου ἐπὶ μονοψήφιον ἀριθμόν.

35. Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστέος καὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι μονοψήφιοι, τὸ γινόμενον εὑρίσκεται διὰ τῆς προσθέσεως συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Π. χ. Ὅταν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν 5×3, τὸ γινόμενον εἶναι $5+5+5$, ἤτοι 15.

Τοιουτοτρόπως διὰ τῆς προσθέσεως εὑρίσκομεν τὰ γινόμενα ὅλων τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν ἀνὰ δύο. Ἔπειτα ἀποστηθίζομεν τὰ γινόμενα ταῦτα, ἵνα προχείρως ἐκτελῶμεν τοὺς πολλαπλασιασμούς. Πάντα τὰ γινόμενα τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν εὑρίσκονται κατατεταγμένα εἰς τὸν κατωτέρω πίνακα, ὅστις καλεῖται *Πυθαγόρειος πίναξ*, διότι πρῶτος ὁ μέγας τῆς ἀρχαιότητος φιλόσοφος Πυθαγόρας ἐπενόησεν αὐτόν.

Πίναξ Πυθαγόρειος.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Εἰς τὸν πίνακα τοῦτον ὁ πρῶτος ὁριζόντιος στίχος περιέχει κατὰ σειρὰν τοὺς ἐννέα μονοψηφίους ἀριθμούς. Ἕκαστος τῶν κατωτέρων στίχων περιέχει κατὰ σειρὰν τὰ γινόμενα τῶν ἀριθμῶν τοῦ πρώτου στίχου ἐπὶ 2, ὁ δεύτερος ἐπὶ 3, ὁ τρίτος ἐπὶ 4 καὶ καθεξῆς μέχρι τοῦ τελευταίου, ὁ ὁποῖος καὶ αὐτὸς περιέχει κατὰ σειρὰν τὰ γινόμενα τῶν ἀριθμῶν τοῦ πρώτου στίχου ἐπὶ 9.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον δύο μονοψηφίων ἀριθμῶν, π. χ. τοῦ 5×7, ζητοῦμεν τὸν πολλαπλασιαστέον 5 εἰς τὸν πρῶτον ὁριζόντιον στίχον καὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν 7 εἰς τὴν πρώτην στήλην, καὶ ἐκεῖ, ὅπου συναντῶνται οἱ δύο στίχοι, οἱ ὁποῖοι ἀρχίζουσιν ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς τούτους, εὑρίσκεται τὸ γινόμενον 35.

Σημ. Ἐὰν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν 1×4, τοῦτο, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, θὰ εἶναι $1+1+1+1$ ἤτοι 4, ἐπίσης 4×1, κατὰ τὸν αὐτὸν ὁρισμόν, εἶναι 4, καὶ $1 \times 1 = 1$. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι, *ὅταν ὁ εἷς τῶν παραγόντων εἶναι 1, τὸ γινόμενον εἶναι ὁ ἕτερος παράγων*. Ἐπίσης $0 \times 4 = 0+0+0+0 = 0$. Ἑπομένως, *ὁ πολλαπλασιασμὸς τοῦ 0 ἐπὶ οἱονδήποτε ἀκέραιον ἀριθμὸν δίδει γινόμενον 0.*

36. Ὅταν πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμόν τινα, οἷον τὸν 7 ἐπὶ 2, τὸν ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον εὑρίσκομεν, λέγομεν *διπλάσιον* τοῦ 7, ὁ-

ταν ἐπὶ 3, *τριπλάσιον*, ὅταν ἐπὶ 4, *τετραπλάσιον* καὶ ἐν γένει τὸ *γινόμενον ἀριθμοῦ τινος ἐπὶ ἄλλον οἱονδήποτε* λέγεται *πολλαπλάσιον τοῦ πρώτου*.

* Πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ πολυψηφίου ἐπὶ μονοψήφιον.

37. Εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν ἀληθεύουσιν αἱ ἑξῆς προτάσεις·

1η. *Τὸ γινόμενον δύο παραγόντων δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν κάμωμεν τὸν πολλαπλασιαστέον πολλαπλασιαστὴν καὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν πολλαπλασιαστέον.*

Παράδειγμα. Τὸ γινόμενον 3×4 εἶναι ἴσον μὲ 4×3.

Ἀπόδειξις. Εἰς τὸ γινόμενον 3×4, τὸ ὁποῖον εἶναι $3+3+3+3$, ἂν ἀναλύσωμεν κατὰ σειρὰν τοὺς προσθετέους εἰς τὰς μονάδας των καὶ προσθέσωμεν κατὰ στήλας τὰς μονάδας ταύτας, ἐπειδὴ ἐξ ἑκάστης στήλης θὰ εὕρωμεν 4, ἐξ ὅλων θὰ ἔχωμεν ἄθροισμα $4+4+4$, ἤτοι 4×3, ἑπομένως $3\times4=4\times3$.

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \hline 4 & 4 & 4 \end{array}$$

Σημ. Ἐκ τῆς ἀληθείας τῆς προτάσεως ταύτης ἕπεται, ὅτι $4\times0=0\times4=0$. Ὅτι δηλ. *πᾶς ἀριθμὸς πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 0 δίδει γινόμενον 0.*

38. 2α. *Ἄθροισμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀριθμόν, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ὅλα τὰ μέρη του ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν καὶ προσθέσωμεν τὰ μερικὰ γινόμενα.*

Παράδειγμα. Τὸ γινόμενον τοῦ ἀθροίσματος $5+4+2$ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 3 εἶναι $5\times3+4\times3+2\times3$ ἤτοι $15+12+6$.

Ἀπόδειξις. Τὸ γινόμενον τοῦ $5+4+2$ ἐπὶ 3, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, εἶναι

$$\begin{array}{c} 5+4+2 \\ 5+4+2 \\ 5+4+2 \end{array}$$

Ἐν τῷ πίνακι τούτῳ προσθέτοντες τοὺς ἀριθμοὺς κατὰ στήλας θὰ ἔχωμεν τὸ 5 τρεῖς φοράς, ἤτοι 5×3, ἐπίσης 4×3 καὶ 2×3. Ἑπομένως τὸ ὁλικὸν ἄθροισμα εἶναι $15+12+6$.

39. Ἂς ὑποθέσωμεν ἤδη, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν 378 ἐπὶ 5. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα πέντε προσθετέων ἴσων πρὸς τὸν 378 οὕτως·

$$\begin{array}{r} 378 \\ 378 \\ 378 \\ 378 \\ 378 \\ \hline 1890 \end{array}$$

Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὴν πρόσθεσιν, καθὼς γνωρίζομεν, θέλομεν εὕρῃ 1890. Ἀλλ' ἀντὶ νὰ λέγωμεν 8 καὶ 8 κάμνουν 16 καὶ 8, 24 καὶ 8 32 καὶ 8 40, λέγομεν 5 φορὰς 8 κάμνει 40. Ἐπειδὴ 40 εἶναι 4 δεκάδες καὶ 0 μονάδες, γράφομεν 0 εἰς τὴν στήλην τῶν μονάδων καὶ τὰς 4 δεκάδας κρατοῦμεν, ἵνα προσθέσωμεν εἰς τὰς δεκάδας· ἔπειτα λέγομεν 5 φορὰς 7 δεκάδες κάμνουν 35 δεκ. καὶ 4 αἱ κρατούμεναι δεκ. 39 δεκ., γράφομεν τὰς 9 δεκ. εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων καὶ τὰς 30 δεκ. τρέπομεν εἰς 3 ἑκατοντάδας, τὰς ὁποίας ἐπίσης κρατοῦμεν, ἵνα προσθέσωμεν εἰς τὰς ἑκατοντάδας. Τέλος λέγομεν 5 φορὰς 3 ἑκατοντάδες κάμνουν 15 καὶ 3 αἱ κρατούμεναι 18 ἑκατοντ., τὰς ὁποίας γράφομεν ὁμοίως.

Ἀντὶ δὲ νὰ γράφωμεν πέντε φορὰς τὸν 378 πρὸς συντομίαν καὶ εὐκολίαν, γράφομεν μίαν μόνον φορὰν τὸν ἀριθμὸν τοῦτον καὶ ὑποκάτω τὸν πολλαπλασιαστήν, κάτωθεν τοῦ ὁποίου γράφομεν εὐθεῖαν· ὑποκάτω τῆς εὐθείας ταύτης γράφεται τὸ γινόμενον.

$$\begin{array}{r} 378 \\ 5 \\ \hline 1890 \end{array}$$

40. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα:

Κανών. *Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν πολυψήφιον ἀριθμὸν ἐπὶ μονοψήφιον, γράφομεν τὸν μονοψήφιον ὑποκάτω τοῦ πολυψηφίου καὶ κάτωθι αὐτῶν ἄγομεν εὐθεῖαν. Ἔπειτα ἀρχίζοντες ἐκ δεξιῶν πολλαπλασιάζομεν διαδοχικῶς τὰ διάφορα ψηφία τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστήν, καὶ ἂν μὲν γινόμενόν τι μερικὸν εἶναι μονοψήφιος ἀριθμός, γράφομεν αὐτὸν κάτωθι τῆς γραμμῆς ὑπὸ τὸ ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστέου, ἐκ τοῦ ὁποίου προέκυψεν· ἂν δὲ εἶναι διψήφιος ἀριθμός, γράφομεν μόνον τὸ ψηφίον τῶν μονάδων του, τὸ δὲ ψηφίον τῶν δεκάδων κρατοῦμεν, ἵνα προσθέσωμεν εἰς τὸ ἑπόμενον γινόμενον.*

Σημ. Ἐὰν ψηφίον τι τοῦ πολλαπλασιαστέου εἶναι 0, καὶ εἰς τὸ γινόμενον θὰ γράψωμεν 0, ἐκτὸς ἂν κρατούμενά τινα προέρχωνται ἐκ τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως.

Παράδειγμα

$$\begin{array}{r} 3\,007 \\ 5 \\ \hline 15\,035 \end{array}$$

Ἐνταῦθα λέγομεν 5 ἐπὶ 7 διδει 35, γράφομεν 5 καὶ κρατοῦμεν 3· κατόπιν λέγομεν 0 ἐπὶ 5 δίδει 0 καὶ 3 τὰ κρατούμενα 3· μετὰ ταῦτα πολλαπλασιάζομεν τὰς 0 ἑκατοντάδας ἐπὶ 5 καὶ εὑρίσκομεν 0, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑπὸ τὴν εὐθεῖαν εἰς τὴν στήλην τῶν ἑκατοντάδων, καὶ τέλος 3 χιλ. ἐπὶ 5 κάμνει 15 χιλ., τὸν ὁποῖον γράφομεν ὁλόκληρον εἰς τὴν στήλην τῶν χιλιάδων.

* Πολλαπλασιασμὸς πολυψηφίου ἀριθμοῦ ἐπὶ πολυψήφιον.

41. Διὰ νὰ ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν πολυψηφίου ἀριθμοῦ ἐπὶ πολυψήφιον, στηριζόμεθα ἐπὶ τῶν ἑξῆς προτάσεων:

42. 1η. *Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμὸν ἐπὶ 10, γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ ἓν μηδενικόν, διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 100, δύο μηδενικά, διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 1000, γράφομεν τρία μηδενικὰ καὶ οὕτω καθεξῆς.*

Π. χ. Ἐὰν πρόκηται νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν 349 ἐπὶ 10, τὸ γινόμενον θὰ εἶναι 3 490· ἐὰν πρόκηται νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 100, τὸ γινόμενον εἶναι 34 900· καὶ ἐὰν ἐπὶ 1000, 349 000.

Ὁ δὲ λόγος εἶναι ὁ ἑξῆς: Ὅταν θέσωμεν ἓν μηδενικὸν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ 349, παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ 349 μονάδες γίνονται δεκάδες εἰς τὸν 3 490, ἄρα ἐδεκαπλασιάσθησαν (διότι ἑκάστη μονάς, ἵνα γίνῃ δεκάς, λαμβάνεται δέκα φοράς), ἤτοι ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς 349 ἐπολλαπλασιάσθη ἐπὶ 10.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι, ἐὰν θέσωμεν δύο μηδενικὰ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ 349, θὰ ἔχωμεν 34 900 καὶ παρατηροῦμεν ὅτι αἱ 349 ἁπλαῖ μονάδες κατέχουν τὴν θέσιν τῶν ἑκατοντάδων εἰς τὸν 34 900, ἤτοι ἔγιναν ἑκατοντάδες, ἄρα ἐπολλαπλασιάσθησαν ἐπὶ 100.

43. 2α. *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμόν τινα ἐπὶ ἄλλον, ὁ ὁποῖος ἔχει ἓν σημαντικὸν ψηφίον ἀκολουθούμενον ὑπὸ μηδενικῶν, πολλαπλασιάζομεν τὸν πολλαπλσιαστέον ἐπὶ τὸ σημαντικὸν ψηφίον καὶ ἔπειτα δεξιὰ τοῦ γινομένου γράφομεν τὰ μηδενικὰ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ.*

Π. χ. Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν τὸν 832 ἐπὶ 300, λαμβάνομεν αὐτὸν πρῶτον τρεῖς φοράς, ἤτοι σχηματίζομεν τὸ ἄθροισμα $832+832+832=832\times 3=2\,496$ καὶ ἔπειτα λαμβάνομεν 100 τοιαῦτα ἀθροίσματα· ἐπειδὴ δὲ ἕκαστον περιέχει τὸν 832 τρεῖς φοράς, τὰ 100 θὰ περιέχουν αὐτὸν τριακοσ ας φοράς, ἤτοι θὰ εἶναι γινόμενον τοῦ 832 ἐπὶ 300· ἀλλὰ διὰ νὰ λάβωμεν τὸν 2 496 ἑκατὸν φοράς, ἤτοι νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 100, ἀρκεῖ νὰ θέσωμεν κατόπιν αὐτοῦ δύο μηδενικὰ καὶ θὰ ἔχωμεν 249 600. Τοῦτο λοιπὸν εἶναι τὸ γινόμενον 832×300.

44. Βασιζόμενοι ἐπὶ τῶν ἀνωτέρω προτάσεων δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν.

Ἂς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν 7 563 ἐπὶ 576. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, πρέπει νὰ σχηματίσωμεν ἄθροισμα 576 προσθετέων ἴσων πρὸς τὸν ἀριθμὸν 7 563. Ἐν πρώτοις σχηματίζομεν ἄθροισμα 6 τοιούτων προσθετέων, ἤτοι πολλαπλασιάζομεν $7\,563\times 6$, ἔπειτα σχηματίζομεν τὸ ἄθροισμα 70 ὁμοίων προσθετέων, ἤτοι πολλαπλασιάζομεν $7\,563\times 70$, καὶ ἐπὶ τέλους πεντακοσίων, ἤτοι πολλαπλασιάζομεν $7\,563\times 500$. Αὗται εἶναι αἱ τρεῖς πράξεις, εἰς ἃς ἀναλύεται ἡ δοθεῖσα, καὶ τὰς ὁποίας δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν.

$$\begin{array}{r}7563\\6\\\hline 45378\end{array}\qquad\begin{array}{r}7563\\70\\\hline 529410\end{array}\qquad\begin{array}{r}7563\\500\\\hline 3781500\end{array}$$

Ἐὰν δὲ προσθέσωμεν τὰ τρία εὑρεθέντα μερικὰ γινόμενα, θὰ ἔχωμεν τὸν 7 563 πεντακοσίας ἑβδομήκοντα ἓξ φοράς, ἤτοι θὰ ἔχωμεν οὕτω τὸ γινόμενον 7 563 × 576. Ἡ πρᾶξις διατάσσεται οὕτως·

	7 563				
	576				
γινόμενον ἐπὶ 6μον.	45 378	περιέχει	τὸν	πολλ/στέον	6 φοράς
» » 7δεκ.	529 410	»	»	»	70 »
» » 5ἑκατ.	3 781 500	»	»	»	500 »
ὁλικὸν γινόμενον	4 356 288	»	»	»	576 »

καὶ ἐκτελεῖται ὡς ἑξῆς· Πολλαπλασιάζομεν τὸν 7 563 πρῶτον ἐπὶ 6, ἔπειτα ἐπὶ 7 δεκάδας, καὶ τὸ πρῶτον ψηφίον 1, τὸ ὁποῖον θὰ εὕρωμεν, τὸ γράφομεν ὑπὸ τὰς δεκάδας τοῦ πρώτου μερικοῦ γινομένου, καὶ τελευταῖον πολλαπλασιάζομεν τὸν πολλαπλασιαστέον ἐπὶ τὰς 5 ἑκατοντάδας, τὸ δὲ πρῶτον ψηφίον, τὸ ὁποῖον θὰ εὕρωμεν, τὸ γράφομεν εἰς τὴν στήλην τῶν ἑκατοντάδων, ἔπειτα προσθέτομεν τὰ μερικὰ γινόμενα.

Σημ. Τὸ ἓν μηδενικὸν τοῦ δευτέρου μερικοῦ γινομένου καὶ τὰ δύο τοιαῦτα τοῦ τρίτου γινομένου παραλείπονται ἐν τῇ πράξει καὶ ἀφίνεται ἡ θέσις αὐτῶν κενή

45. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ :

Κανών. *Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν πολυψήφιον ἀριθμὸν ἐπὶ πολυψήφιον, γράφομεν τὸν πολλαπλασιαστὴν ὑπὸ τὸν πολλαπλασιαστέον καὶ ὑποκάτω σύρομεν εὐθεῖαν. Μετὰ ταῦτα πολλαπλασιάζομεν τὸν πολλαπλασιαστέον κατὰ σειρὰν ἐπὶ ἓν ἕκαστον σημαντικὸν ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ἀρχίζοντες ἐκ τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων. Τὰ διάφορα μερικὰ γινόμενα γράφομεν τὸ ἓν ὑποκάτω τοῦ ἄλλου οὕτως, ὥστε τὸ πρῶτον ἐκ δεξιῶν ψηφίον ἑκάστου γινομένου νὰ εὑρίσκηται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην, εἰς τὴν ὁποίαν καὶ τὸ ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ἐκ τοῦ ὁποίου προέκυψεν. Ἔπειτα προσθέτομεν τὰ γινόμενα ταῦτα καὶ τὸ ἄθροισμα εἶναι τὸ ὁλικὸν γινόμενον.*

* Συντομίαι.

46. 1η· Εἰς τὸν ἀνωτέρω κανόνα ὑπάγεται καὶ ἡ περίπτωσις, κατὰ τὴν ὁποίαν μεταξὺ τῶν σημαντικῶν ψηφίων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ὑπάρχουσι καὶ μηδενικά. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, *ἀφοῦ παραλείψωμεν τοὺς πολλαπλασιασμοὺς ἐπὶ τὰ μηδενικά, λαμβάνομεν τὸ ἀμέσως πρὸς τὰ ἀριστερὰ τῶν μηδενικῶν σημαντικὸν ψηφίον καὶ πολλαπλασιάζομεν φροντίζοντες, ἵνα τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ γινομένου γράψωμεν εἰς τὴν αὐτὴν στήλην, εἰς τὴν ὁποίαν εὑρίσκεται τὸ ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ἐκ τοῦ ὁποίου προέκυψεν.*

Παράδειγμα

```
    37 004
     8 005
----------
   185 020
296 032
----------
296 217 020
```

47. 2α· Ἐπειδὴ τὸ γινόμενον δύο παραγόντων δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν κάμωμεν τὸν πολλαπλασιαστέον πολλαπλασιαστὴν καὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν πολλαπλασιαστέον, διὰ τοῦτο *ἐκλέγομεν πάντοτε ὡς πολλαπλασιαστὴν ἐκεῖνον, ὅστις ἔχει ὀλιγώτερα σημαντικὰ ψηφία.* Ἐὰν π. χ. ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 69 ἐπὶ 307 646, λαμβάνομεν ὡς πολλαπλασιαστὴν τὸν 69.

Πολλαπλασιαστὴς ὁ 307 646.

```
         69
    307 646
-----------
        414
       276
      414
     483
  2 070
-----------
 21 227 574
```

Πολλαπλασιαστὴς ὁ 69.

```
   307 646
        69
----------
 2 768 814
1 845 876
----------
21 227 574
```

Εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ δεύτερος πολλαπλασιασμὸς εἶναι καὶ εὐκολώτερος καὶ ἀσφαλέστερος.

48. 3η· *Ἐὰν εἷς τῶν παραγόντων ἔχῃ μηδενικὰ εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ, παραλείπομεν ταῦτα καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸν προκύπτον-*

τα ἀριθμὸν ἐπὶ τὸν ἕτερον, εἰς τὸ τέλος δὲ τοῦ γινομένου γράφομεν τὰ παραλειφθέντα μηδενικά.

Ἂν πρόκηται π. χ. νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον τοῦ 4 563 ἐπὶ 12 000, πρέπει νὰ λάβωμεν τὸν 4 563 δώδεκα χιλιάδας φοράς. Ἀλλ' ἐὰν πρῶτον λάβωμεν τὸν 4 563 δώδεκα μόνον φοράς, ἤτοι πολλαπλασιάσωμεν 4 563 ἐπὶ 12, καὶ τὸ γινόμενον τούτων, ὅπερ εἶναι 55 756, λάβωμεν χιλίας φοράς, ἤτοι πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ χίλια (ὅπερ γίνεται, ἐὰν γράψωμεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ 54 756 τρία μηδενικά), εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ οὕτως εὑρισκόμενος ἀριθμὸς 54 756 000 περιέχει τὸν 4 563 δώδεκα χιλιάδας φοράς, ἤτοι εἶναι τὸ ζητούμενον γινόμενον.

49. 4η. *Ἐὰν καὶ οἱ δύο παράγοντες ἔχωσι μηδενικὰ εἰς τὸ τέλος αὐτῶν, παραλείπομεν ταῦτα καὶ πολλαπλασιάζομεν τοὺς οὕτω προκύπτοντας ἀριθμούς, εἰς τὸ τέλος δὲ τοῦ γινομένου αὐτῶν γράφομεν τόσα μηδενικά, ὅσα ἔχουν καὶ οἱ δύο παράγοντες.*

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι πρόκειται νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον τῶν δύο ἀριθμῶν 35 700 καὶ 540. Καθὼς ἀνωτέρω ἐμάθομεν, ἐπειδὴ ὁ πολλαπλασιαστὴς ἔχει ἓν μηδενικὸν εἰς τὸ τέλος, τὸ γινόμενον εὑρίσκεται, ἂν παραλείψωμεν τὸ μηδενικὸν καὶ πολλαπλασιάσωμεν 35 700$\times$54 καὶ εἰς τὸ τέλος τοῦ γινομένου θέσωμεν τὸ παραλειφθὲν μηδενικόν· ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦτον ὁ 35 700 ἔχει εἰς τὰ δεξιὰ δύο μηδενικά, παραλείπομεν καὶ ταῦτα, καὶ πολλαπλασιάζομεν 357$\times$54, εἰς δὲ τὸ τέλος τοῦ γινομένου γράφομεν καὶ τὰ δύο ταῦτα μηδενικὰ καὶ τὸ ἓν τοῦ 540, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ γραφῇ, γίνονται τρία, δηλ. τόσα, ὅσα ἔχουν οἱ δύο παράγοντες.

50. 5η. *Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμόν τινα ἐπὶ 4, δυνάμεθα νὰ λάβωμεν δύο φορὰς τὸν πολλαπλασιαστέον καὶ ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον θὰ εὕρωμεν, ἄλλας δύο.*

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν 35$\times$4· πολλαπλασιάζομεν πρῶτον ἐπὶ 2 καὶ εὑρίσκομεν 70, καὶ τοῦτο πάλιν ἐπὶ 2 καὶ εὑρίσκομεν 140, ὁ δὲ λόγος εἶναι φανερός.

51. $6_η$. *Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμόν τινα ἐπὶ 9, πολλαπλασιάζομεν πρῶτον αὐτὸν ἐπὶ 10 καὶ ἀπὸ τοῦ γινομένου ἀφαιροῦμεν τὸν ἀριθμόν.*

Τοῦτο εἶναι ὀρθὸν διὰ τὸν ἑξῆς λόγον : Διὰ νὰ εὕρωμεν π.χ. τὸ γινόμενον τοῦ 45 ἐπὶ 9, πρέπει νὰ λάβωμεν τὸν 45 ἐννέα φοράς. 'Αλλ' εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ αὐτὸ θὰ εὕρωμεν, ἂν λάβωμεν αὐτὸν 10 φοράς, ὁπότε θὰ εὕρωμεν γινόμενον 450, καὶ ἔπειτα ἀφαιρέσωμεν τὸν 45 μίαν φοράν, ὅτε εὑρίσκομεν τελικὸν γινόμενον 405. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι, *ἵνα πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμόν τινα ἐπὶ 19, πολλαπλασιάζομεν πρῶτον ἐπὶ 20 καὶ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ γινομένου τὸν ἀριθμόν.*

Προσθήκη. Ὁμοίως *καὶ ὅταν πρόκηται νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 29, πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 30· ὅταν δὲ ἐπὶ 39, πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 40· καὶ ὅταν ἐπὶ 49, πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 50 καὶ καθεξῆς,* ἀπὸ ἑκάστου δὲ γινομένου πρέπει νὰ ἀφαιρῶμεν ἅπαξ τὸν πολλαπλασιαστέον.

Παράδειγμα. Ἂν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν 43×69, λαμβάνομεν τὸ 43 ἑβδομήκοντα φορὰς καὶ εὐκόλως εὑρίσκομεν 3 010, ἀπὸ τούτου δὲ ἀφαιροῦμεν μίαν φορὰν 43 καὶ εὑρίσκομεν 2 967.

52. $7^η$. *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον ἀριθμοῦ τινος ἐπὶ 11, γράφομεν πρῶτον τὸ ψηφίον τῶν μονάδων, ἀριστερὰ τούτου τὸ ἄθροισμα τῶν μονάδων καὶ δεκάδων τοῦ ἀριθμοῦ, ἀριστερὰ πάλιν τούτου τὸ ἄθροισμα τῶν δεκάδων καὶ ἑκατοντάδων καὶ οὕτω καθεξῆς· πρὸς δὲ τὸ ἄκρον ἀριστερὸν γράφομεν καὶ τὸ τελευταῖον πρὸς τὰ ἀριστερὰ ψηφίον τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ ἢ τὸ κατὰ μονάδα μεγαλείτερον, ἂν ἡ προηγουμένη πρόσθεσις ἀφῆκε κρατούμενον.*

Παρατήρησις. Ἂν τὰ ἀθροίσματα, τὰ ὁποῖα εὑρίσκομεν, ὑπερβαίνουν τὸν 9, γράφομεν τὰς μονάδας αὐτῶν, τὸ δὲ ψηφίον τῶν δεκάδων φυλάττομεν ὡς κρατούμενον καὶ προσθέτομεν εἰς τὸ ἑπόμενον ἄθροισμα.

Παράδειγμα. Ἂν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν 3 698 ἐπὶ 11, ἐν πρώτοις γράφομεν 8, κατόπιν λέγομεν 8 καὶ 9 κάμνουν

17, γράφομεν τὸ 7 ἀριστερὰ τοῦ 8 καὶ θὰ ἔχωμεν 78. Ἔπειτα λέγομεν 1 τὸ κρατούμενον καὶ 9 τὸ ὅλον 10 καὶ 6, 16, κρατοῦμεν τὸ 1 καὶ γράφομεν τὸ 6 ἀριστερὰ τοῦ 78, ὅτε θὰ ἔχωμεν 678. Μετὰ ταῦτα λέγομεν 1 τὸ κρατούμενον καὶ 6 τὸ ὅλον 7 καὶ 3 κάμνουν 10, κρατοῦμεν πάλιν τὸ 1 καὶ γράφομεν 0 ἀριστερὰ τοῦ 678 καὶ θὰ ἔχωμεν 0 678· τέλος λέγομεν 1 καὶ 3 τὸ ὅλον 4, τὸ ὁποῖον γράφομεν ἀριστερὰ τοῦ 0 678, καὶ θὰ ἔχωμεν οὕτω 40 678.

Ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι τὸ ζητούμενον γινόμενον. Ὁ λόγος τῶν τοιούτων πράξεων φαίνεται, ἂν ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν καὶ διατάξωμεν τὴν πρᾶξιν, προσέξωμεν δέ, ὅταν θὰ ἐκτελῶμεν τὴν πρόσθεσιν, ποῖα ψηφία προστίθενται.

3 698
11
3 698
3 698
40 678

53. **Προσθῆκαι.** *Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμόν τινα ἐπὶ 22, διπλασιάζομεν τὸν ἀριθμὸν καὶ κατόπιν πράττομεν, ὅπως καὶ ἐπὶ τοῦ 11.*

Παράδειγμα. Ἂν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν 74 ἐπὶ 22, διπλασιάζομεν τὸ 74 καὶ εὑρίσκομεν 148, κατόπιν γράφομεν πρῶτον τὸ ψηφίον τῶν μονάδων 8 καὶ προσθέτομεν 8 καὶ 4 κάμνουν 12, κρατοῦμεν τὸ 1, τὸ δὲ 2 γράφομεν ἀριστερὰ τοῦ 8 καὶ ἔχομεν 28. Μετὰ ταῦτα λέγομεν 4 καὶ 1 γίνονται 5 καὶ 1 τὸ κρατούμενον 6· γράφομεν τὸ 6 ἀριστερὰ τοῦ 28 καὶ εὑρίσκομεν 628 καὶ ἀριστερὰ τούτου γράφομεν καὶ τὴν 1 ἑκατοντάδα. Ὁ ἀριθμὸς 1 628, τὸν ὁποῖον κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον εὑρίσκομεν, εἶναι τὸ ζητούμενον γινόμενον.

74
22
148
148
1 628

Περὶ τῆς ὀρθότητος τῶν πράξεων τούτων πειθόμεθα, ἐὰν ἐκτελέσωμεν, ὅπως συνήθως, τὸν πολλαπλασιασμὸν καὶ παρατηρήσωμεν τὴν διάταξιν τῶν πράξεων.

Ὁμοίως διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμόν τινα ἐπὶ 33, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμὸν ἐπὶ 3 καὶ μετὰ ταῦτα ἐργαζόμεθα, ὅπως καὶ ἀνωτέρω.

'Εὰν δὲ τετραπλασιάσωμεν ἀριθμόν τινα καὶ ἐπὶ τοῦ τετραπλασίου ἐργασθῶμεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, εὑρίσκομεν τὸ γινόμενον ἐπὶ 44· καὶ ἐὰν πενταπλασιάσωμεν τὸν πολλαπλασιαστέον καὶ πράξωμεν ὁμοίως, εὑρίσκομεν τὸ γινόμενον ἐπὶ 55.

'Εξ ὅσων εἴπομεν, εὐκόλως δυνάμεθα νὰ ἐννοήσωμεν πῶς εὑρίσκονται τὰ γινόμενα ἐπὶ 66, 77, 88, 99.

54. 8η. *Ἵνα συντόμως ἐκτελῶμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν ὁποιουδήποτε ἀριθμοῦ ἐπὶ 12, πρέπει νὰ γνωρίζωμεν ἐκ μνήμης τὰ γινόμενα τοῦ ἀριθμοῦ τούτου ἐπὶ πάντας τοὺς μονοψηφίους.*

Παράδειγμα. Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν τὸν 3 567 ἐπὶ 12, λέγομεν 7 ἐπὶ 12 δίδει 84, γράφομεν 4 καὶ κρατοῦμεν 8, ἔπειτα λέγομεν 6 ἐπὶ 12 δίδει 72 καὶ 8 τὰ κρατούμενα 80, γράφομεν 0 ἀριστερὰ τοῦ 4, καὶ κρατοῦμεν πάλιν 8, ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν 5 ἐπὶ 12 καὶ εὑρίσκομεν 60 καὶ 8 τὰ κρατούμενα 68, γράφομεν 8 ἀριστερὰ τοῦ 04 καὶ εὑρίσκομεν 804, κρατοῦμεν δὲ 6· τέλος πολλαπλασιάζομεν 3 ἐπὶ 12 καὶ εὑρίσκομεν 36 καὶ 6 τὰ κρατούμενα 42, τὸ ὁποῖον γράφομεν ἀριστερὰ τοῦ 804, καὶ εὑρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν 42 804, ὅστις εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ 3 567 ἐπὶ 12.

Βάσανος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ διὰ τοῦ σταυροῦ.

55. Ἔστω τὸ ἑξῆς παράδειγμα·

```
     87 567 248
            787
   ------------
    612 970 736
   700 537 984
  612 970 736
 --------------
 68 915 424 176
```

1η	2α
2	4
8	8
3η	4η

Διὰ νὰ δοκιμάσωμεν, ἂν ὁ πολλαπλασιασμὸς ἐγένετο ἄνευ λάθους, προσθέτομεν ὅλα τὰ μικρότερα τοῦ 9 ψηφία τοῦ πολλαπλασιαστέου καί, ἅμα φθάσωμεν εἰς ἄθροισμα διψήφιον ἀριθμόν, προσθέτομεν καὶ τούτου τὰ ψηφία καὶ εὑρίσκομεν οὕτω μονοψήφιον ἀριθμόν, εἰς τὸν ὁποῖον προσθέτομεν τὸ ἑπόμενον ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστέου, καὶ ἐξακολουθοῦμεν τοιουτοτρόπως, μέχρις ὅτου λάβωμεν ὅλα τὰ ψηφία τοῦ προκειμένου ἀριθμοῦ, ὁπότε καταλήγομεν εἰς μονοψήφιον ἀριθμόν.

Εἰς τὸ προκείμενον παράδειγμα λέγομεν 8 καὶ 4 κάμνουν 12, 2 καὶ 1 τὸ ὅλον 3 καὶ 2 ἴσον 5 καὶ 7 ἴσον 12, 2 καὶ 1 κάμνουν 3 καὶ 6 τὸ ὅλον 9, τὸ παραλείπομεν καὶ ἐξακολουθοῦμεν ἐκ τοῦ ἑπομένου ψηφίου 5 καὶ 7 ἴσον 12, 2 καὶ 1 ἴσον 3 καὶ 8 κάμνουν 11, 1 καὶ 1 κάμνουν 2. Τὸν ἀριθμὸν τοῦτον γράφομεν εἰς τὴν 1ην γωνίαν τοῦ σταυροῦ.

Ἔπειτα κατὰ τὸν αὐτὸν ἀκριβῶς τρόπον εὑρίσκομεν καὶ ἐκ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ τὸν ἀριθμὸν 4, τὸν ὁποῖον γράφομεν εἰς τὴν 2αν γωνίαν. Ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τὰ δύο εὑρεθέντα ψηφία καί, ἂν τὸ γινόμενον αὐτῶν εἶναι ἀριθμὸς διψήφιος, προσθέτομεν τὰ ψηφία αὐτοῦ, ὡς ἀνωτέρω. Ἐνταῦθα εὑρίσκομεν 8, τὸ ὁποῖον γράφομεν εἰς τὴν 3ην γωνίαν. Ἐὰν μετὰ ταῦτα προσθέσωμεν, ὡς ἀνωτέρω, καὶ τὰ ψηφία τοῦ γινομένου καὶ εὕρωμεν ἀριθμὸν ἴσον πρὸς τὸν ἐν τῇ 3ῃ γωνίᾳ γεγραμμένον, ἡ πρᾶξις πιθανὸν νὰ ἐγένετο ἄνευ λάθους. Εὑρίσκομεν πράγματι 8.

Παρατήρησις. Ἡ δοκιμὴ αὕτη δὲν εἶναι ἀσφαλής, διότι πιθανὸν μονάς τις παραλειφθεῖσα εἴς τι ψηφίον τοῦ γινομένου νὰ προσετέθη εἰς ἄλλο καὶ τότε τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τοῦ γινομένου μένει τὸ αὐτό, ὅπως συμβαίνει, καὶ ἂν ἀλλάξωμεν τὰς θέσεις τῶν ψηφίων τοῦ γινομένου.

56. Διὰ νὰ ἐκτελέσωμεν ἀσφαλῶς τὴν δοκιμήν, ἐπαναλαμβάνομεν τὴν πρᾶξιν, λαμβάνοντες τὸν πολλαπλασιαστέον ὡς πολλαπλασιαστὴν καὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν ὡς πολλαπλασιαστέον.

* Γινόμενον πολλῶν παραγόντων.

57. Πολλάκις ἀντὶ δύο μᾶς δίδονται πολλοὶ ἀριθμοὶ καὶ ζητεῖται τὸ γινόμενον αὐτῶν. Καθὼς π. χ. ὅταν ζητῆται νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν 5, 3, 6, 4.

Τὸ γινόμενον τοῦτο εὑρίσκομεν, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸν πρῶτον ἀριθμὸν ἐπὶ τὸν δεύτερον καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν ἐπὶ τὸν *τρίτον καὶ τὸ νέον γινόμενον ἐπὶ τὸν τέταρτον καὶ οὕτω καθεξῆς, ἂν οἱ παράγοντες εἶναι περισσότεροι.*

Εἰς τὸ παράδειγμα, τὸ ὁποῖον ἐδόθη, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο πρώτους, εὑρίσκομεν 15, καὶ τοῦτον πάλιν πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ 6 εὑρίσκομεν 90, καὶ τὸν νέον τοῦτον ἐπὶ 4, εὑρίσκομεν 360. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι τὸ γινόμενον τῶν δοθέντων καὶ λέγεται γινόμενον πολλῶν ἀριθμῶν ἢ παραγόντων· σημειοῦται δὲ ὡς ἑξῆς : $5\times3\times6\times4$.

* Ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

58. Ὅταν ἔχωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον $3\times5\times2$, καθὼς εἴπομεν, θὰ εὕρωμεν πρῶτον τὸ γινόμενον 3×5, τὸ ὁποῖον εἶναι $3+3+3+3+3$, καὶ τοῦτο μετὰ ταῦτα θὰ ἐπαναλάβωμεν δίς· προσθέτοντες κατὰ στήλας τοὺς ἀριθμοὺς τούτους εὑρίσκομεν ἐξ ἑκάστης στήλης $3+3$ ἢ 3×2,

$$\begin{array}{c}3+3+3+3+3\\3+3+3+3+3\end{array}$$

τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον καὶ μὲ 2×3· ἐπειδὴ δὲ εἶναι 5 τοιαῦται στῆλαι, θὰ ἔχωμεν πεντάκις τὸ γινόμενον τοῦτο, ἤτοι $2\times3\times5$ ἢ καὶ τὸ $3\times2\times5$, ὥστε τὰ τρία γινόμενα $3\times5\times2$, $3\times2\times5$ καὶ $2\times3\times5$ εἶναι ἴσα. Ἐκ τούτου συνάγομεν, ὅτι :

Τὸ γινόμενον τριῶν παραγόντων δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν λάβωμεν τοὺς παράγοντας καὶ κατ' ἄλλην σειράν.

59. Ἡ ἀλήθεια αὕτη ἀπεδείχθη διὰ γινόμενα δύο ἢ τριῶν παραγόντων. Ἀποδεικνύεται ὅμως, ὅτι :

Ὁσοιδήποτε καὶ ἂν εἶναι οἱ παράγοντες, τὸ γινόμενον αὐτῶν δὲν μεταβάλλεται, ἂν τοὺς λάβωμεν καθ' οἱανδήποτε σειράν.

Ἐκ τῆς ἀληθείας ταύτης ἐξάγεται ἡ ἑξῆς:

Εἰς γινόμενον πολλῶν παραγόντων δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν δύο ἢ περισσοτέρους παράγοντας διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν.

Π. χ. εἰς τὸ γινόμενον $5\times17\times2\times4\times5$ δυνάμεθα τὸν 5 καὶ 2 νὰ συμπτύξωμεν εἰς τὸ γινόμενον αὐτῶν 10, καὶ ἔπειτα τὸν 4 καὶ 5 εἰς τὸ γινόμενον αὐτῶν 20, ὁπότε θὰ ἔχωμεν $10\times17\times20$.

Διότι, ἐὰν τὸ γινόμενον $5\times17\times2\times4\times5$ λάβωμεν κατὰ τὴν σειρὰν $5\times2\times17\times4\times5$ καὶ ἀρχίσωμεν τὸν πολλαπλασιασμόν, σταματήσωμεν δὲ εἰς τοὺς δύο πρώτους παράγοντας, θὰ ἔχωμεν, χωρὶς τὸ γινόμενον νὰ μεταβληθῇ, $10\times17\times4\times5$, ἂν καὶ εἰς τοῦτο λάβωμεν τοὺς παράγοντας κατὰ τὴν σειρὰν $4\times5\times10\times17$ καί, ἀφοῦ ἀρχίσωμεν τὴν πρᾶξιν, σταματήσωμεν εἰς τοὺς δύο πρώτους, θὰ ἔχωμεν 20×10×17. Καὶ ταῦτα ἐγένοντο χωρὶς τὸ δοθὲν γινόμενον νὰ μεταβληθῇ.

Παρατήρησις. Ἡ ἰδιότης αὕτη πολλάκις πολὺ εὐκολύνει εἰς τὴν ἐκτέλεσιν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ διὰ καταλλήλου ἐκλογῆς τῶν παραγόντων.

Εἰς τὸ δοθὲν παράδειγμα ἀφοῦ ἐπολλαπλασιάσαμεν τὸν 4 ἐπὶ 5 καὶ τὸν 5 ἐπὶ 2, ἐὰν ἤδη πολλαπλασιάσωμεν τὸν 20 ἐπὶ 10, εὑρίσκομεν 200, τὸν ὁποῖον εὐκόλως πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 17. Ἐνῷ, ἂν ὁ πολλαπλασιασμὸς ἐξετελεῖτο κατ' ἄλλην σειρὰν τῶν παραγόντων, θὰ ἦτο δυσκολώτερος.

60. Ἐὰν εἰς τὸ τελευταῖον τοῦτο γινόμενον 20×10×17 ἀντὶ τοῦ 20 θέσωμεν 4×5, καὶ ἀντὶ τοῦ 10 θέσωμεν 2×5, εὑρίσκομεν τὸ ἐξ ἀρχῆς δοθὲν 4×5×2×5×17, ἄρα:

Εἰς γινόμενον πολλῶν ἀριθμῶν δυνάμεθα νὰ ἀναλύσωμέν τινας τούτων εἰς τοὺς παράγοντας αὐτῶν.

61. *Γινόμενον πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀριθμόν, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ εἷς τῶν παραγόντων ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον.*

Π.χ. Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν τὸ γινόμενον 3×5×7×2 ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 4, πολλαπλασιάζομεν μόνον ἕνα παράγοντα, οἷον τὸν 5 ἐπὶ 4, καὶ εὑρίσκομεν 3×20×7×2. Τοῦτο εἶναι τὸ ζητούμενον γινόμενον.

Ἀπόδειξις. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν 3×5×7×2 ἐπὶ 4, θὰ ἐκτελέσωμεν τὰς ἑξῆς πράξεις. Πρῶτον θὰ πολλαπλασιάσωμεν 3×5 καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν ἐπὶ 7, καὶ τὸ νέον τοῦτο γινόμενον ἐπὶ 2, καὶ τοῦτο τέλος ἐπὶ 4. Ἀλλὰ τοῦτο οὐδὲν ἄλλο εἶναι παρὰ ἡ εὕρεσις τοῦ γινομένου 3×5×7×2×4, εἰς τὸ ὁποῖον γνωρίζομεν ὅτι δυνάμεθα νὰ συμπτύξωμεν τοὺς παράγοντας 5 καὶ 4 εἰς τὸ γινόμενον αὐτῶν 20 καὶ θὰ ἔχωμεν 3×20×7×2.

Προβλήματα.

1) Ἐὰν μία τουρκικὴ λίρα ἔχῃ 108 γρόσια, 4 τουρκικαὶ λίραι πόσα γρόσια ἔχουν;

Λύσις. Ἀφοῦ ἡ 1 τουρκικὴ λίρα ἔχει 108 γρόσ.

αἱ 2 τουρκικαὶ λίραι θὰ ἔχωσιν 108+108, ἤτοι 108×2,
» 3 » » » 108+108+108, ἤτοι 108×3
καὶ » 4 » » » 108+108+108+108, ἤτοι 432 γρόσια.

2) Τὸ ἓν εἰκοσάφραγκον ἔχει 95 γρόσια, 7 εἰκοσάφραγκα πόσα γρόσια ἔχουν;

Λύσις. Ἀφοῦ τὸ εἰκοσάφραγκον ἔχει 95 γρόσ.

τὰ 2 εἰκοσάφρ. θὰ ἔχωσι $95+95$, ἤτοι 95×2,

» 3 » » » $95+95+95$, ἤτοι 95×3.

Καὶ ἂν ἐξακολουθήσωμεν τοιουτοτρόπως σκεπτόμενοι, θὰ εὕρωμεν, ὅτι τὰ 7 εἰκοσάφρ. ἔχουσιν 7 φορὰς τὰ 95 γρόσ., δηλ.

$95+95+95+95+95+95+95$, ἤτοι 95×7 γρόσ. ἢ 665 γρόσ.

Διὰ τῶν ἰδίων συλλογισμῶν λύομεν καὶ τὸ ἑξῆς πρόβλημα:

3) Μία ἀγγλικὴ λίρα ἔχει 120 γρόσ., 8 ἀγγλικαὶ λίραι πόσα γρόσια ἔχουσι; Ἀπ. 960.

4) Ἓν μετζήτιον ἔχει 20 γρόσ., 4 μετζήτια πόσα γρόσια ἔχουν; Ἀπ. 80.

5) Μία κριμίτσα (δουκᾶτον Αὐστρίας) ἔχει 56 γρόσ., 12 κριμίτσαι πόσα γρόσια ἔχουσι; Ἀπ. 672.

6) Ἓν φράγκον ἔχει 100 λεπτά, 25 φρ. πόσα λεπτὰ ἔχουσι; Ἀπ. 2 500.

7) Μία ὀκὰ ἔχει 400 δράμ., 7 ὀκ. πόσα δράμ. ἔχουσι; Ἀπ. 2800.

8) Μία ὀκὰ ἔχει 1 280 γραμμάρια, 9 ὀκ. πόσα γραμμάρ. ἔχουν; Ἀπ. 11 520.

9) Ὁ εἷς πῆχυς ἔχει 8 ρούπια, 15 πήχ. πόσα ρούπια ἔχουσι; Ἀπ. 120.

10) Τὸ ἓν μέτρον ἔχει 100 δακτύλους, 35 μέτρα πόσους δακτύλους ἔχουσι; Ἀπ. 3 500.

Σημ. Ἅπαντα τὰ ἀνωτέρω προβλήματα πρέπει νὰ λύωνται διὰ λεπτομεροῦς ἀναλύσεως κατὰ τὸν ὑποδειχθέντα τρόπον.

11) Ἓν χιλιόγραμμον, ἤτοι 1000 γραμμάρια, καθαροῦ χρυσοῦ ἔχει ἀξίας 3 437 φρ., 74 χιλιόγραμμα καθαροῦ χρυσοῦ πόσων φράγκων ἀξίαν ἔχουσιν;

Λύσις. Ἀφοῦ τὸ ἓν χιλιόγραμμον ἔχει ἀξίαν 3 437 φρ., 2 χγ. θὰ ἔχουν ἀξίαν δύο φορὰς μεγαλειτέραν, ἤτοι $3\,437\times2$, καὶ τὰ 3 χιλιόγραμμα θὰ ἔχωσιν ἀξίαν 3 φορὰς μεγαλειτέραν, ἤτοι 3437×3, καὶ οὕτω σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν ἐν τέλει, ὅτι τὰ 74 χιλιόγραμμα θὰ ἔχωσιν ἀξίαν 74 φορὰς μεγαλειτέραν τοῦ 3 437, ἤτοι 254 338 φρ.

12) Ἐὰν ἔχωμεν 8 καλάθια μῆλα καὶ κάθε καλάθιον περιέχῃ 4 δωδεκάδας, πόσα μῆλα ἔχομεν; Ἀπ. 384.

13) Κύριός τις πληρώνει κατ' ἔτος δι' ἐνοίκιον μιᾶς οἰκίας 1 560 φρ. ὑπενοικιάζει δὲ τρία δωμάτια καὶ λαμβάνει ἀπὸ τὸ α' 65 φρ. κατὰ μῆνα, ἀπὸ τὸ β' 85 φρ. καὶ ἀπὸ τὸ γ' 27 φρ. Πόσα φρ. κερδίζει κατ' ἔτος;
Ἀπ. Κατ' ἔτος λαμβάνει 2 124 φρ., κερδίζει δὲ 564 φρ.

14) Ἐλεήμων τις ἠγόρασε διὰ τρία πτωχὰ παιδία 3 ζεύγη ὑποδημάτων πρὸς 25 γρ. τὸ ζεῦγος, ἐπλήρωσε δὲ διὰ τὰ βιβλία ἑκάστου ἀπὸ 35 γρόσ. Πόσα τῷ ἐπερίσσευσαν ἀπὸ 2 ἀγγλικὰς λίρας; Ἀπ. 60.

15) Ἡ ἡμέρα ἔχει 24 ὥρας, ἑκάστη ὥρα ἔχει 60 πρῶτα λεπτά, ἅτινα γράφονται 60′ καὶ 1′ ἔχει 60 δεύτερα λεπτά, ἅτινα γράφονται 60″· Μία ἡμέρα πόσα πρῶτα λεπτὰ ἔχει καὶ πόσα δεύτερα;
Ἀπ. 1 440′, 86 400″.

16) Ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου χωρίζεται εἰς 360 μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται μοῖραι καὶ γράφονται 360°. Ἑκάστη μοῖρα χωρίζεται εἰς 60 ἄλλα μικρότερα ὀνομαζόμενα πρῶτα λεπτά, ἅτινα γράφονται οὕτως 60′, καὶ ἕκαστον 1′ χωρίζεται εἰς 60 ἴσα μικρότερα τὰ δεύτερα λεπτά, ἅτινα γράφονται οὕτως 60″. Πόσα πρῶτα λεπτὰ ἔχει ὅλη ἡ περιφέρεια καὶ πόσα δεύτερα; Ἀπ. 21 600′, 1 296 000″·

17) Εἷς στατὴρ ἔχει 44 ὀκάδας. Πόσα δράμια ἔχει εἷς στατήρ;
Ἀπ. 17 600.

18) Μία ἑβδομὰς πόσας ὥρας ἔχει, πόσα πρῶτα λεπτὰ καὶ πόσα δεύτερα; Ἀπ. 168 ὥρ. 10080′ καὶ 604 800″.

19) Οἰκοδόμημα ἔχει 28 παράθυρα, κάθε παράθυρον ἔχει 8 ὑαλοπίνακας, τῶν ὁποίων ἕκαστος τιμᾶται 2 γρόσ. Πόσα γρόσ. τιμῶνται ὅλοι οἱ ὑαλοπίνακες τοῦ οἰκοδομήματος; Ἀπ. 448.

20) Ἐργάτης λαμβάνει ἡμερομίσθιον 27 γρόσ., δαπανᾷ πρὸς συντήρησίν του 12 γρόσ. καθ' ἑκάστην, στέλλει καὶ εἰς τοὺς γονεῖς του 200 γρόσ. τὸν μῆνα. Πόσα γρόσια τῷ περισσεύουν εἰς ἓν ἔτος, ἂν ἐργασθῇ 290 ἡμέρας;

Λύσις. Θὰ εὕρωμεν πρῶτον πόσον λαμβάνει εἰς τὰς 290 ἡμέρας, κατόπιν πόσον δαπανᾷ τὸ ἔτος, τὸ ὁποῖον ἔχει 365 ἡμέρας, πόσα στέλλει εἰς τοὺς γονεῖς του καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τελευταίων ἀφαιροῦντες ἀπὸ τοῦ πρώτου εὑρίσκομεν περίσσευμα 1050 γρόσια.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

62. **Ὁρισμός.** Οἱ ἀριθμοὶ 20, 25, 30, 35, 40 εἶναι πολλαπλάσια τοῦ 5, διότι προκύπτουσιν, ἂν τὸν 5 πολλαπλασιάσωμεν διαδοχικῶς ἐπὶ 4, 5, 6, 7, 8 κτλ. Τὸ μεγαλείτερον τῶν πολλαπλασίων τούτων τοῦ 5, τὸ ὁποῖον περιέχεται ἢ χωρεῖ εἰς τὸν 37, εἶναι ὁ 35, διότι ὁ 40 εἶναι μεγαλείτερος τοῦ 37 καὶ δὲν χωρεῖ εἰς αὐτόν. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος, δηλ. ὁ 35, λέγεται *μέγιστον πολλαπλάσιον* τοῦ 5 ἐντὸς τοῦ 37.

Παραδείγματα. Τὸ μέγιστον πολλαπλάσιον τοῦ 8, τὸ ὁποῖον χωρεῖ εἰς τὸν 35, εἶναι ὁ 32, τὸ μέγιστον πολλαπλάσιον τοῦ 6, τὸ ὁποῖον χωρεῖ εἰς τὸν 59, εἶναι ὁ 54 κτλ.

63. **Πρόβλ. 1ον.** Τρεῖς ἐργάται ἔλαβον δι' ἐργασίαν 15 γρόσ. *Πῶς θὰ μοιράσωμεν ταῦτα εἰς αὐτούς, ὥστε νὰ λάβωσιν ἴσα μερίδια;*

Λύσις. Κατὰ πρῶτον θὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὰ 15 γρόσια 3 γρ. καὶ θὰ δώσωμεν εἰς καθένα ἀνὰ 1 γρόσ., ὥστε θὰ λάβωσιν 1 γρόσ. ὁ πρῶτος, 1 γρόσ. ὁ δεύτερος καὶ 1 γρόσ. ὁ τρίτος.

Ἔπειτα ἐκ τῶν 12 γροσ. ἀφαιροῦμεν πάλιν 3 γρόσ. καὶ δίδομεν εἰς κάθε ἕνα ἀνὰ 1 γρόσ. καὶ 1 γρόσ., τὸ ὁποῖον πρὶν ἐδώκαμεν, τὸ ὅλον κάμνουν 2 γρόσ., ὥστε θὰ λάβωσι 2 γρόσ. ὁ πρῶτος, 2 γρόσ. ὁ δεύτερος καὶ 2 γρόσ. ὁ τρίτος.

Ἂν πάλιν ἀπὸ τὰ 9 γρόσ., τὰ ὁποῖα ἔμειναν, ἀφαιρέσωμεν 3 γρόσ. καὶ μερίσωμεν ἀνὰ 1 γρόσ. εἰς κάθε ἕνα, μαζὶ μὲ τὰ 2 γρόσ., τὰ ὁποῖα ἔλαβον, θὰ ἔχωσι τὸ ὅλον 3 γρόσ. ὁ πρῶτος, 3 γρόσ. ὁ δεύτερος, 3 γρόσ. ὁ τρίτος. Καὶ ἂν κάμωμεν καὶ τετάρτην ἀφαίρε-

15	
3	ὁ καθεὶς 1
12	
3	ὁ καθεὶς 2
9	
3	ὁ καθεὶς 3
6	
3	ὁ καθεὶς 4
3	
3	ὁ καθεὶς 5
0	

σιν, θὰ ἀναλογοῦν εἰς κάθε ἕνα 4 γρόσια· ἂν δὲ καὶ πέμπτην ἀφαίρεσιν κάμωμεν, θὰ ἀναλογοῦν εἰς κάθε ἕνα 5 γρόσια, καὶ θὰ ἐξακολουθήσωμεν, μέχρις ὅτου ἐλαττωθοῦν τὰ γρόσια, τὰ ὁποῖα μοιράζομεν τόσον, ὥστε νὰ μὴ δυνάμεθα νὰ ἀφαιρέσωμεν τὰ 4 γρόσ.

Ἐκ τούτων συμπεραίνομεν, ὅτι ἕκαστος θὰ λάβῃ τόσα γρόσια, ὅσας φορὰς δυνηθῶμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν διαδοχικῶς τὸν 3 ἀπὸ τὸν 15, ἤτοι ὅσας φορὰς ὁ 3 χωρεῖ εἰς τὸν 15. Ἐδῶ κάμνομεν 5 ἀφαιρέσεις καὶ 5 μερισμούς. Θὰ λάβουν λοιπὸν 5 γρόσ. ἕκαστος.

Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἐμερίσαμεν τὰ 15 γρόσ. εἰς τρία ἴσα μέρη. Ἡ τοιαύτη πρᾶξις λέγεται *μερισμὸς* ἢ *διαίρεσις*. Τὸ μέρος δέ, τὸ ὁποῖον ἕκαστος λαμβάνει, λέγεται *μερίδιον*.

Ἐὰν τὰ μερίδια ὅλων τὰ προσθέσωμεν, εἶναι φανερόν, ὅτι θὰ ἔχωμεν τὰ 15 γρόσ., ἤτοι

$$15=5+5+5=5\times3.$$

Πρόβλ. 2ον. *Ἐὰν τὰ γρόσια ἀντὶ 15 εἶναι 17,* ὁμοίως ἐργαζόμενοι θέλομεν εὕρῃ, ὅτι *ἕκαστος ἐργάτης θὰ λάβῃ 5 γρόσ.*, ἀλλὰ θὰ μείνουν καὶ 2 γρόσ., τὰ ὁποῖα δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ μερισθῶσι. Θὰ εἶναι δὲ

$$17=5+5+5+2=5\times3+2.$$

64. Εἰς τὸ πρῶτον πρόβλημα ὁ 15 ἐμερίσθη ἀκριβῶς εἰς τρία μερίδια ἴσα πρὸς τὸν 5 χωρὶς νὰ περισσεύσῃ τίποτε, ἐνῷ εἰς τὸ δεύτερον περισσεύει καὶ ἀριθμός τις μικρότερος τοῦ 3, ὅστις ὀνομάζεται *ὑπόλοιπον*. Διὰ τοῦτο τὴν μὲν πρώτην διαίρεσιν (ὅταν δηλ. δὲν μένῃ ὑπόλοιπον) λέγομεν *τελείαν*, τὴν δὲ δευτέραν (ὅταν δηλ. μᾶς μένῃ ὑπόλοιπον) λέγομεν *ἀτελῆ διαίρεσιν*.

65. Εἰς πᾶσαν διαίρεσιν ὁ ἀριθμός, ὅστις μερίζεται, λέγεται *διαιρετέος*, ὁ δὲ ἀριθμός, τὸν ὁποῖον κατ' ἐπανάληψιν ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ διαιρετέου, λέγεται *διαιρέτης*, καὶ ἐκεῖνος, ὅστις δεικνύει πόσας φορὰς χωρεῖ ὁ διαιρέτης εἰς τὸν διαιρετέον, ἢ πόσον εἶναι ἕκαστον μέρος, εἰς τὰ ὁποῖα ἐζητεῖτο νὰ χωρισθῇ ὁ διαιρετέος, λέγεται *πηλίκον*.

Πρόβλ. 3ον. Ἐργάται τινὲς ἐμοιράσθησαν 15 γρόσια καὶ ἔλαβεν ὁ καθεὶς 3 γρόσια. *Πόσοι εἶναι οἱ ἐργάται;*

Λύσις. Ἀπὸ τὰ 15 γρόσ. ἀφαιροῦμεν 3 γρόσ. καὶ δίδομεν εἰς ἕνα ἐργάτην, ἀπὸ τὰ 12 γρόσ., τὰ ὁποῖα ἔμειναν, ἀφαιροῦμεν καὶ δευτέραν φορὰν 3 γρόσ. καὶ διδομεν εἰς *δεύτερον* ἐργάτην, μένουν δὲ 9 γρόσ., ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἀφαιροῦμεν τρίτην φορὰν 3 γρόσ. καὶ δίδομεν εἰς *τρίτον* ἐργάτην, μένουν δὲ καὶ 6 γρόσ., ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἀφαιροῦμεν 3 γρόσ. τετάρτην φορὰν καὶ διδομεν εἰς *τέταρτον* ἐργάτην, μένουν δὲ καὶ 3 γρόσ., τὰ ὁποῖα ἀφαιροῦμεν διὰ πέμπτην φορὰν καὶ διδομεν εἰς *πέμπτον* ἐργάτην.

15
3 ὁ 1ος
———
12
3 ὁ 2ος
———
9
3 ὁ 3ος
———
6
3 ὁ 4ος
———
3
3 ὁ 5ος
———
0

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι οἱ ἐργάται εἶναι τόσοι, ὅσαι εἶναι αἱ ἀφαιρέσεις, τὰς ὁποίας ἐκάμομεν, ἤτοι ὅσας φορὰς ὁ 3 χωρεῖ εἰς τὸν 15.

Καὶ ἡ πρᾶξις αὕτη λέγεται *διαίρεσις*, ἰδιαιτέρως δὲ *μέτρησις*, καὶ τὸ πηλίκον *λόγος*.

Ἐὰν εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο καὶ οἱ 5 ἐργάται ἑνώσωσι τὰ μερίδιά των, θὰ σχηματισθῇ πάλιν ὁ ἀριθμὸς 15 γρόσ., δηλ. θὰ εἶναι $15=3+3+3+3+3=3\times5$.

Πρόβλ. 4ον. *Ἂν τὰ γρόσια ἀντὶ 15 ἦσαν 17 καὶ οἱ ἐργάται πάλιν 5, θὰ ἐλάμβανον ἀνὰ 3, θὰ ἐπερίσσευον δὲ καὶ 2.* Θὰ ἔχωμεν δὲ καὶ πάλιν:

$$17=3+3+3+3+3+2=3\times5+2.$$

Παρατήρησις. Εἰς τὴν μέτρησιν ὁ ἀριθμός, τὸν ὁποῖον ἑκάστην φορὰν ἀφαιροῦμεν, δὲν μερίζεται, ὅπως εἰς τὰ προβλήματα τοῦ μερισμοῦ. Ἐκτὸς τούτου ἡ μέτρησις διαφέρει τοῦ μερισμοῦ καὶ κατὰ τὸ ὅτι τὸ πηλίκον (λόγος), ὡς ἐκφράζον ἁπλῶς πόσας φορὰς χωρεῖ ὁ διαιρέτης εἰς τὸν διαιρετέον, εἶναι πάντοτε ἀριθμὸς ἀφῃρημένος, ἔπειτα δὲ μετατρέπεται εἰς συγκεκριμένον κατὰ τὰς ἀπαιτήσεις τοῦ προβλήματος. Ἐνῷ εἰς τὸν μερισμὸν τὸ πηλίκον (μερίδιον), ἐπειδὴ εἶναι ἓν ἐκ τῶν ἴσων μερῶν, εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζομεν τὸν διαιρετέον, εἶναι πάντοτε ὁμοειδὲς πρὸς τοῦτον.

66. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τοὺς ἑξῆς ὁρισμοὺς τῆς διαιρέσεως:

1ος. *Διαίρεσις λέγεται ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας μοιράζομεν ἀριθμόν τινα εἰς ἴσα μέρη.*

2ος. *Διαίρεσις λέγεται ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν πόσας φορὰς ἀριθμός τις χωρεῖ εἰς ἄλλον.*

3ος. *Διαίρεσις λέγεται ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας δοθέντων δύο ἀριθμῶν εὑρίσκομεν τρίτον, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν δεύτερον δίδει τὸν πρῶτον (τελεία διαίρεσις) ἢ τὸ μέγιστον πολλαπλάσιον τοῦ δευτέρου, τὸ ὁποῖον χωρεῖ εἰς τὸν πρῶτον (διαίρεσις ἀτελής).*

Σχέσεις μεταξὺ διαιρετέου, διαιρέτου καὶ πηλίκου.

67. Εἰς τὸ πρῶτον καὶ τρίτον πρόβλημα, καθ' ἃ ἡ διαίρεσις εἶναι τελεία, εὕρομεν $15=5\times3$.

Ἐκ τούτου συνάγομεν ὅτι:

Ὅταν ἡ διαίρεσις εἶναι τελεία, ὁ διαιρετέος ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον.

Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ τὸ πηλίκον λέγεται *τέλειον πηλίκον*.

68. Ἐκ δὲ τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου προβλήματος, καθ' ἃ ἡ διαίρεσις εἶναι ἀτελής, εὕρομεν ὅτι $17=5\times3+2$. Ὅθεν:

Ὅταν ἡ διαίρεσις εἶναι ἀτελής, ὁ διαιρετέος εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον, ἀφοῦ εἰς τὸ γινόμενον τοῦτο προστεθῇ καὶ τὸ ὑπόλοιπον.

Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ τὸ πηλίκον λέγεται *πηλίκον κατὰ προσέγγισιν*.

Παρατήρησις. Εἰς πᾶσαν ἀτελῆ διαίρεσιν τὸ *ὑπόλοιπον εἶναι πάντοτε μικρότερον τοῦ διαιρέτου*· διότι, ἂν εἶναι μεγαλείτερον, τότε δύναται ὁ διαιρέτης ἀκόμη νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ ὑπολοίπου, μέχρις ὅτου τοῦτο γίνῃ μικρότερον τοῦ διαιρέτου, καὶ τότε μόνον ἡ διαίρεσις θεωρεῖται περατωμένη.

Σημεῖον τῆς διαιρέσεως εἶναι τὸ :, λέγεται δὲ *διὰ* καὶ γράφεται μεταξὺ τοῦ διαιρετέου καὶ διαιρέτου ὡς ἑξῆς· 15 : 3. Τοῦτο σημαίνει, ὅτι πρέπει νὰ διαιρεθῇ ὁ 15 εἰς τρία ἴσα μέρη (μερισμός) ἢ εἰς μέρη ἴσα πρὸς τὸν 3 (μέτρησις) ἢ γενικώτερον νὰ διαιρεθῇ ὁ 15 διὰ 3. 'Επίσης 27:4 σημαίνει, ὅτι πρέπει νὰ διαιρεθῇ ὁ 27 διὰ 4.

* 'Αριθμὸς ψηφίων τοῦ πηλίκου.

69. Πρὶν ἀκόμη ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν πόσα ψηφία θὰ ἔχῃ τὸ πηλίκον ὡς ἑξῆς·

Γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρέτου τόσα μηδενικά, ὅσα χρειάζονται, ἵνα γίνῃ ὁ διαιρέτης μεγαλείτερος ἀπὸ τὸν διαιρετέον. Ὅσα εἶναι τὰ μηδενικὰ ταῦτα, τόσα ψηφία θὰ ἔχῃ τὸ πηλίκον.

Παραδείγματα. Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 3 567, ὅστις πρόκειται νὰ διαιρεθῇ διὰ τοῦ 735. 'Ο ἀριθμὸς οὗτος εἰσέρχεται εἰς τὸν διαιρετέον· ἐὰν ὅμως θέσωμεν εἰς τὸ τέλος τοῦ διαιρέτου ἓν μηδενικόν, δηλ. πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν ἐπὶ 10, γίνεται 7 350, καὶ παρατηροῦμεν, ὅτι δὲν εἰσέρχεται πλέον εἰς τὸν διαιρετέον, ἄρα τὸ πηλίκον εἶναι ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ δέκα· ἔχει λοιπὸν ἓν ψηφίον.

'Εὰν ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 3 756 διὰ τοῦ 23 καὶ κατόπιν τοῦ διαιρέτου θέσωμεν δύο μηδενικά, δηλ. τὸν πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 100, γίνεται 2 300, παρατηροῦμεν δὲ ὅτι εἰσέρχεται εἰς τὸν διαιρετέον, ὥστε τὸ πηλίκον εἶναι ἢ 100 ἢ μεγαλείτερος ἀριθμός. 'Εὰν ὅμως θέσωμεν εἰς τὸν διαιρέτην τρία μηδενικά, ἤτοι πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 1 000, γίνεται 23000 καὶ δὲν εἰσέρχεται πλέον εἰς τὸν διαιρετέον, ἄρα τὸ πηλίκον εἶναι ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ 1000, μεγαλείτερος ὅμως τοῦ 100, ἔχει λοιπὸν τρία ψηφία, δηλ. ὅσα εἶναι τὰ μηδενικά, τὰ ὁποῖα ἐθέσαμεν κατόπιν τοῦ διαιρέτου διὰ νὰ γίνῃ μεγαλείτερος τοῦ διαιρετέου.

Διὰ τῶν ἰδίων συλλογισμῶν εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 3 756 : 4 ἔχει τρία ψηφία.

* Ἐκτέλεσις τῆς διαιρέσεως.

Ἰδιαίτεραί τινες περιπτώσεις.

70. 1η *Ὅταν ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα διὰ τῆς μονάδος, τὸ πηλίκον εἶναι αὐτὸς ὁ ἀριθμός.*

Παράδειγμα. Τὸ πηλίκον τοῦ 15 διὰ τοῦ 1 εἶναι 15· διότι οὗτος πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν διαιρέτην 1 δίδει τὸν διαιρετέον.

71. 2α. *Ὅταν διαιρῶμεν ἀριθμόν τινα διὰ τοῦ ἑαυτοῦ του, πηλίκον εἶναι ἡ μονάς.*

Παράδειγμα. Τὸ πηλίκον τοῦ 15 διὰ τοῦ 15 εἶναι 1, διότι οὗτος πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν διαιρέτην 15 δίδει τὸν διαιρετέον·

72. 3η. *Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 0 δι' οἱουδήποτε ἀριθμοῦ εἶναι 0.*

Παράδειγμα. Τὸ πηλίκον τοῦ 0 διὰ 5 εἶναι 0, διότι τοῦτο πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην 5 δίδει $0 \times 5 = 0$, ἤτοι τὸν διαιρετέον.

73. 4η. *Πᾶσα διαίρεσις, εἰς τὴν ὁποίαν ὁ μὲν διαιρετέος εἶναι διάφορος τοῦ 0, οἷον 8, ὁ δὲ διαιρέτης 0, εἶναι ἀδύνατος,* διότι οὐδεὶς ἀριθμὸς ὑπάρχει, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν διαιρέτην 0 νὰ δίδῃ τὸν διαιρετέον 0.

74. *Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως, εἰς τὴν ὁποίαν καὶ ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης εἶναι 0, ὡς $0 : 0$, εἶναι οἱοσδήποτε ἀριθμός·* διότι πᾶς ἀριθμός, οἷον 7, πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν διαιρέτην 0 δίδει τὸν διαιρετέον.

* Μερικαὶ περιπτώσεις.

75. Εἰς πλείστας περιπτώσεις ἡ ἐκτέλεσις τῆς διαιρέσεως στηρίζεται ἐπὶ τῆς ἑξῆς φανερᾶς ἀληθείας:

Ὅταν ἔχωμεν νὰ μοιράσωμεν πολλὰ διακεκριμένα πλήθη, δηλ. πολλὰς ὁμάδας, δυνάμεθα νὰ μοιράσωμεν ἕκαστον πλῆθος χωριστά.

Παράδειγμα. Ἂν πρόκηται 10 λίρας, 15 μετζήτια καὶ 25 γρόσια νὰ μοιράσωσι 5 ἄνθρωποι, εἶναι φανερόν, ὅτι θὰ μοιράσωσι χωριστὰ τὰς λίρας, χωριστὰ τὰ μετζήτια καὶ χωριστὰ τὰ γρόσια, δηλ. κάθε ὁμάδα χωριστά. Ἐπίσης ἂν ἔχωμεν νὰ μερίσωμεν 12 φράγκα, 18 φράγκα καὶ 24 φράγκα εἰς 6 ἀνθρώπους, δυνάμεθα νὰ μοιράσωμεν πρῶτον εἰς αὐτοὺς τὰ 12, ἔπειτα τὰ 18 καὶ μετὰ ταῦτα τὰ 24. Τοῦτο γενικώτερον ἐκφράζεται ὡς ἑξῆς·

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἄθροισμα δι' ἀριθμοῦ, δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν τὰ μέρη τοῦ ἀθροίσματος ἕκαστον χωριστά.

Παράδειγμα. Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $(12+18+24):6$ εὑρίσκομεν, ἂν διαιρέσωμεν χωριστὰ τὸν 12, χωριστὰ τὸν 18 καὶ χωριστὰ τὸν 24 διὰ τοῦ 6 καὶ προσθέσωμεν τὰ τρία πηλίκα· οὕτω εὑρίσκομεν $2+3+4$ ὅπερ εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον, διότι τοῦτο πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην 6 δίδει $(2+3+4)\times 6=12+18+24$, ἤτοι τὸν διαιρετέον.

76. Περίπτωσις 1η. *Ὁ διαιρέτης καὶ τὸ πηλίκον ἔχουσιν ἀνὰ ἓν ψηφίον.*

Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὸ πηλίκον εὑρίσκεται εὐκολώτατα διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Ἔστω παράδειγμα ἡ διαίρεσις $27:3$, τῆς ὁποίας τὸ πηλίκον εἶναι 9· διότι $3\times 9=27$. Ἐπίσης εἰς τὴν διαίρεσιν $34:8$ τὸ πηλίκον εἶναι 4· διότι $8\times 4=32$. Οὗτος δὲ εἶναι τὸ μέγιστον πολλαπλάσιον τοῦ 8, τὸ ὁποῖον εἰσέρχεται εἰς τον 34. Τὸ ἀμέσως μεγαλείτερον πολλαπλάσιον τοῦ 8 εἶναι 8×5, ἤτοι 40, καὶ βλέπομεν, ὅτι δὲν εἰσέρχεται εἰς τὸν 34, ἄρα τὸ πηλίκον εἶναι 4, μένει δὲ ὑπόλοιπον 2.

77. Περίπτωσις 2α. *Ὁ διαιρέτης μονοψήφιος, **τὸ** δὲ πηλίκον πολυψήφιον.*

Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 3 567 νὰ διαιρεθῇ διὰ 4, δηλ. 3 567 γρόσ. νὰ μοιρασθῶσιν εἰς 4 ἀνθρώπους. Ὁ ἀριθμὸς 3567 σύγκειται ἀπὸ 3 χιλ. 5 ἑκατοντάδ., 6 δεκάδας καὶ 7 μονάδας· δυνάμεθα λοιπὸν νὰ μερίσωμεν εἰς τοὺς 4 ἀνθρώπους ἕκαστον μέρος χωριστά. Ἐπειδὴ ὅμως αἱ χιλιάδες εἶναι ὀλιγώτεραι ἀπὸ τέσσαρας καὶ δὲν εἶναι δυνατὸν ἀκέραιαι νὰ διαιρεθῶσι διὰ 4, τρέπομεν ταύτας εἰς 30 ἑκατοντάδας, αἵτινες μετὰ τῶν 5 ἑκατοντάδων ἀποτελοῦσι 35 ἑκατοντάδας· τὰς ἑκατοντάδας ταύτας δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν διὰ 4 καὶ εὑρίσκομεν ἕκαστον μέρος ἴσον πρὸς 8 ἑκατοντάδας. Εἰς ἕκαστον λοιπὸν θὰ δώσωμεν 8 ἑκατοντάδας, εἰς δὲ τοὺς 4, $8\times 4=32$ ἑκατοντάδας, θὰ μείνῃ δὲ καὶ ὑπόλοιπον 3 ἑκατοντάδες. Τὰς ἑκατοντάδας ταύτας, ἐπειδὴ δὲν δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν εἰς 4 μέρη, τρέπομεν εἰς 30 δεκάδας, αἵτινες μετὰ τῶν 6 τοῦ διαιρετέου δίδουσι 39 δεκάδας. Τὸν ἀριθμὸν τοῦτον δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ 4 καὶ τὸ πηλίκον θὰ εἶναι ὁ μονοψήφιος ἀριθμὸς 9, ὅστις, ἐπειδὴ προῆλθεν ἐκ μερισμοῦ δεκάδων, παριστᾷ δεκάδας. Τέλος μένει νὰ μοιρασθῶσιν αἱ 7 μονάδες εἰς τέσσαρα μέρη, ἤτοι νὰ διαιρεθῇ 7 : 4, τὸ πηλίκον εἶναι 1 καὶ ὑπόλοιπον 3. Ὥστε ἕκαστος ἄνθρωπος θὰ λάβῃ 8 ἑκατοντάδ., 9 δεκάδ. καὶ 1 μονάδα, ἤτοι 891 γρόσ., θὰ μείνουν δὲ καὶ 3 γρόσ. ὑπόλοιπον. Ὁ ἀριθμὸς λοιπὸν 891 εἶνα τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 3 567 : 4. Καὶ πράγματι ὁ ἀριθμὸς οὗτος πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν διαιρέτην 4 δίδει $4 \times 891 = 3\,564$, ὅστις εἶναι τὸ μέγιστον πολλαπλάσιον τοῦ 4, τὸ ὁποῖον περιέχεται εἰς τὸν 3 567· τὸ ἑπόμενον πολλαπλάσιον $4 \times 892 = 3\,568$ εἶναι μεγαλείτερον τοῦ διαιρετέου καὶ δὲν εἰσέρχεται εἰς αὐτόν.

$$\begin{array}{l|l} 3\,5'6'7' & 4 \\ \cline{2-2} 32 & 891 \\ \cline{1-1} \;\;36 & \\ \;\;36 & \\ \cline{1-1} \;\;\;07 & \\ \;\;\;\;\;4 & \\ \cline{1-1} \;\;\;\;\;3 & \end{array}$$

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται, ὡς φαίνεται παραπλεύρως καὶ ἐκτελεῖται ὡς ἑξῆς:

Γράφομεν τὸν διαιρετέον, δεξιὰ τούτου τὸν διαιρέτην καὶ μεταξὺ αὐτῶν εὐθεῖαν κατακόρυφον, κάτωθι δὲ τοῦ διαιρέτου σύρομεν γραμμὴν ὁριζοντίαν, ὑποκάτω τῆς ὁποίας γράφομεν τὸ πηλίκον. Μετὰ τοῦτο *χωρίζομεν ἀριστερὰ τοῦ διαιρετέου τόσα ψηφία, ὅσα ἀπαιτοῦνται, ἵνα εὕρωμεν πηλίκον μονοψήφιον.*

Ἐνταῦθα χωρίζομεν δύο μονοψήφια. Καὶ λέγομεν ὁ 4 εἰς τὸν 35 εἰσχωρεῖ 8 φοράς· τὸν ἀριθμὸν τοῦτον πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 4 καὶ τὸ γινόμενον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸν 35.

Δεξιὰ τοῦ πρώτου μερικοῦ ὑπολοίπου 3 καταβιβάζομεν ἐκ τοῦ διαιρετέου τὸ ἀκόλουθον ψηφίον 6· οὕτω σχηματίζεται ὁ ἀριθμὸς 36 καὶ λέγομεν ὁ 4 εἰς τὸν 36 εἰσχωρεῖ 9 φοράς· τὸν 9, ὅστις εἶναι τὸ δεύτερον ψηφίον τοῦ πηλίκου, γράφομεν δεξιὰ τοῦ 8 καὶ πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 4· τὸ γινόμενον $4 \times 9 = 36$ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸν μερικὸν διαιρετέον 36 καὶ εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 0. Δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου τούτου καταβιβάζομεν ἐκ τοῦ διαιρετέου τὸ ἀκόλουθον ψηφίον 7 καὶ τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν 7 διαιροῦμεν διὰ τοῦ 4 καὶ εὑρίσκομεν 1, ὅστις εἶναι τὸ τρίτον ψηφίον τοῦ πηλίκου. Τὸ ψηφίον τοῦτο γράφομεν δεξιὰ τοῦ 9 καὶ κατόπιν πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 4. Τὸ δὲ γινόμενον $4 \times 1 = 4$ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ 7 καὶ εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 3. Ὁ ἀριθμὸς 3 εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως, ὁ δὲ 891 εἶναι τὸ πηλίκον.

Σημ. Διὰ νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν ταύτην, παρατηροῦμεν ὅτι ἐξετελέσαμεν τρεῖς ἄλλας τῆς πρώτης περιπτώσεως, τὰς ὁποίας λέγομεν μερικὰς διαιρέσεις. Αὗται εἶναι τόσαι εἰς ἑκάστην διαίρεσιν, ὅσα εἶναι καὶ τὰ ψηφία τοῦ πηλίκου. Οἱ διαιρετέοι τῶν μερικῶν τούτων διαιρέσεων λέγονται μερικοὶ διαιρετέοι.

```
32'2'6'7' | 7
28        |------
          | 4 609
 42
 42
  067
   63
    4
```

Παρατήρησις. Εἶναι ἐνδεχόμενον μερική τις διαίρεσις νὰ μὴ ἐκτελῆται, τότε γράφομεν 0 δεξιὰ τοῦ εὑρεθέντος πηλίκου καὶ καταβιβάζομεν τὸ ἀκόλουθον ψηφίον τοῦ διαιρετέου. Εἰς τὸ παρακείμενον παράδειγμα ἡ τρίτη μερικὴ διαίρεσις δὲν ἐκτελεῖται, διότι ὁ μερικὸς διαιρετέος 6 δεκάδες εἶναι μικρότερος τοῦ διαιρέτου 7 καὶ δὲν διαιρεῖται δι' αὐτοῦ. Εἰς τὸ πηλίκον λοιπὸν μονάδες τῆς τάξεως ταύτης δὲν ὑπάρχουν, διὰ τοῦτο θέτομεν 0 δεξιὰ τῶν εὑρεθέντων ψηφίων τοῦ πηλίκου, ἔπειτα καταβιβάζομεν τὸ ἀκόλουθον τοῦ διαιρετέου ψηφίον 7 καὶ ἐξακολουθοῦμεν τὴν διαίρεσιν.

```
35'6'0'2'3' | 4
32          |------
            | 89005
 36
 36
  0023
    20
     3
```

Ἔστω ἡ διαίρεσις $356023 : 4$. Εἰς τὸ παράδειγμα τοῦτο ἡ τρίτη μερικὴ διαίρεσις $0 : 4$ δὲν ἐκτελεῖται, διὰ τοῦτο γράφομεν 0 εἰς τὸ πηλίκον καὶ καταβιβάζομεν δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου τὸ ψηφίον 2 τοῦ διαιρετέου· ἐπειδὴ ὅμως καὶ ἡ τετάρτη αὕτη μερικὴ διαίρεσις $2 : 4$ δὲν ἐκτελεῖται, ἐγράψαμεν καὶ ἄλλο ἓν μηδενικὸν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ εὑρεθέντος πηλίκου καὶ κατεβιβάσαμεν ἐκ τοῦ διαιρετέου καὶ τὸ τελευταῖον ψηφίον 3. Οὕτω προέκυψε μερικὸς διαιρετέος 23, ὅστις διαιρούμενος διὰ 4 δίδει πηλίκον 5. Ὁ ἀριθμὸς 89 005 εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον.

Σημ. Κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς πράξεως ἀντὶ τὰ γινόμενα τοῦ διαιρέτου ἐπὶ ἓν ἕκαστον ψηφίον τοῦ πηλίκου νὰ τὰ γράφωμεν κάτωθι τῶν μερικῶν διαιρετέων καὶ ἔπειτα νὰ ἀφαιρῶμεν, πρὸς συντομίαν ἀφαιροῦμεν αὐτὰ χωρὶς νὰ τὰ γράψωμεν. Οὕτως εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα λέγομεν 4 ἐπὶ 8 δίδει 32, ἀπὸ 35 μένουν 3, γράφομεν 3 κάτωθεν τοῦ 35 καὶ ἐξακολουθοῦμεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον· τότε ἡ διαίρεσις λαμβάνει τὴν ἑξῆς διάταξιν:

356 023	4	32 267	7	3 587	4
36	89 005	42	4 609	38	896
0023		067		27	
3		4		3	

78. Περίπτωσις 3η. *Ὁ διαιρέτης πολυψήφιος, τὸ δὲ πηλίκον μονοψήφιον.*

Ἔστω πρὸς ἐκτέλεσιν ἡ διαίρεσις 6 073 : 745. Εἰς τὴν διαίρεσιν ταύτην τὸ πηλίκον εἶναι μονοψήφιον, διότι ὅταν θέσωμεν ἓν μηδενικὸν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρέτου, οὗτος γίνεται 7 450, ὅστις εἶναι ἀριθμὸς μεγαλείτερος τοῦ διαιρετέου.

Ἤδη πρόκειται νὰ εὕρωμεν πόσας φορὰς ὁ διαιρέτης περιλαμβάνεται εἰς τὸν διαιρετέον. Ὁ διαιρέτης συνίσταται ἀπὸ 7 ἑκατοντ. καὶ ἀπὸ ἀριθμόν τινα δεκάδων καὶ μονάδων. Ἀλλ' εἶναι φανερόν, ὅτι αἱ 7 ἑκατοντ. τοῦ διαιρέτου δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἰσέλθουν οὔτε εἰς τὰς μονάδας, οὔτε εἰς τὰς δεκάδας τοῦ διαιρετέου, ἀλλὰ μόνον εἰς τὰς 60 ἑκατοντ. αὐτοῦ, εἰς τὰς ὁποίας εἰσέρχονται 8 φοράς. Ὁ διαιρετέος λοιπὸν 6 073 περιλαμβάνει τὰς 7 ἑκατοντ., ἤτοι τὸν 700, ὀκτὼ φοράς· δὲν εἶναι λοιπὸν δυνατὸν νὰ περιλαμβάνῃ τὸν 745 περισσοτέρας φοράς· ἄρα τὸ πηλίκον θὰ εἶναι ἢ 8 ἢ ἀριθμὸς μικρότερος αὐτοῦ, διότι πιθανὸν ἑκατοντάδες τινὲς νὰ προέλθωσιν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν μονάδων καὶ τῶν δεκάδων τοῦ διαιρέτου. Πολλαπλασιάζοντες τὸν διαιρέτην 745 ἐπὶ 8 εὑρίσκομεν 5 960, ὅστις εἶναι μικρότερος τοῦ διαιρετέου. Ὁ ἀριθμὸς λοιπὸν 8 εἶναι τὸ πηλίκον. Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ διαιρετέου τὸν 5 960, εὑρίσκομεν τὸ ὑπόλοιπον 113.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς:

Παράδειγμα α'.		*Παράδειγμα β'.*		*Παράδειγμα γ'.*	
6 073	745	14 236	1978	1 873	284
5 960	8	13 846	7	1 704	6
113		390		169	

Παρατήρησις 1η. Ἐν τῷ δευτέρῳ παραδείγματι, εἰς τὰς 14 χιλιάδας τοῦ διαιρετέου, ἡ 1 χιλιὰς τοῦ διαιρέτου εἰσέρχεται 14 φοράς· ἀλλ' ἐπειδὴ γνωρίζομεν, ὅτι καὶ εἰς ταύτην τὴν διαίρεσιν τὸ πηλίκον θὰ εἶναι μονοψήφιον, ἀρχίζομεν τὰς δοκιμὰς ἀπὸ τὸν μεγαλείτερον μονοψήφιον ἀριθμὸν 9. Δοκιμάζοντες εὑρίσκομεν, ὅτι οὔτε ὁ 9 οὔτε ὁ 8 εἶναι πηλίκον, διότι τὰ γινόμενα αὐτῶν ἐπὶ τὸν διαιρέτην εἶναι μεγαλείτερα τοῦ διαιρετέου. Τέλος ὁ 7 εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον. Τὰ αὐτὰ περίπου παρατηροῦμεν καὶ εἰς τὸ τρίτον παράδειγμα.

Παρατήρησις 2α. Διὰ νὰ ἀποφεύγωμεν τὰς ἐπανειλημμένας ταύτας δοκιμάς, παρατηροῦμεν, ἂν τὸ δεύτερον πρὸς τὰ ἀριστερὰ ψηφίον τοῦ διαιρέτου εἶναι μεγαλείτερον τοῦ 5, τότε αὐξάνομεν τὸ πρῶτον ψηφίον κατὰ 1 καὶ οὕτως ηὐξημένον παρατηροῦμεν ποσάκις εἰσέρχεται εἰς τὸ πρῶτον ἢ εἰς τὰ δύο πρῶτα πρὸς τὰ ἀριστερὰ ψηφία τοῦ διαιρετέου. Π. χ. Ἐν τῷ δευτέρῳ παραδείγματι, ἐπειδὴ τὸ δεύτερον ψηφίον τοῦ διαιρέτου εἶναι 9, ἂν θεωρήσωμεν τὸ πρῶτον ψηφίον 1 ηὐξημένον κατὰ 1 καὶ εἴπωμεν τὸ 2 εἰς τὸν 14, ἀμέσως εὑρίσκομεν τὸ ἀληθὲς πηλίκον 7· ὁμοίως εἰς τὸ τρίτον παράδειγμα ἀντὶ νὰ εἴπωμεν τὸ 2 εἰς τὸν 18, ἐπειδὴ τὸ δεύτερον ψηφίον τοῦ διαιρέτου εἶναι μεγαλείτερον τοῦ 5, λέγομεν τὸ 3 εἰς τὸν 18 καὶ ἀμέσως εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον πηλίκον 6. Δυνατὸν ὅμως διὰ τοῦ τρόπου τούτου νὰ εὕρωμεν πηλίκον μικρότερον τοῦ ἀληθοῦς, ὅπως συμβαίνει εἰς τὴν διαίρεσιν 1456 : 167. Ἐνταῦθα, ἐπειδὴ τὸ δεύτερον ψηφίον τοῦ διαιρέτου εἶναι 6, τὸ δὲ πρῶτον πρὸς τὰ ἀριστερὰ 1, διαιροῦντες τὸ 14 διὰ τοῦ 2 εὑρίσκομεν πηλίκον 7 καὶ ὑπόλοιπον 287.

1456	157
1169	7
287	

Ἐπειδὴ ὅμως τὸ ὑπόλοιπον εἶναι μεγαλείτερον τοῦ διαιρέτου, συμπεραίνομεν, ὅτι οὗτος εἰσέρχεται περισσοτέρας φορὰς εἰς τὸν διαιρετέον, καὶ διὰ τοῦτο δοκιμάζομεν ὡς πηλίκον τὸν ἀμέσως μεγαλείτερον ἀριθμὸν 8, ὁπότε εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 120, ὅπερ εἶναι μικρότερον τοῦ διαιρέτου. Ὁ ἀριθμὸς 8 εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον.

Παρατήρησις 3η. Κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς πράξεως, ὅταν πολλαπλασιάζωμεν τὸ εὑρεθὲν ψηφίον τοῦ πηλίκου ἐπὶ ἕκαστον ψηφίον τοῦ διαιρέτου, δυνάμεθα καὶ χωρὶς νὰ γράφωμεν τὰ γινόμενα ταῦτα νὰ ἀφαιρῶμεν οὕτω· τὸ γινόμενον τῶν μονάδων τοῦ διαιρέτου ἀπὸ τὰς μονάδας τοῦ διαιρετέου, κατόπιν τὸ εὑρεθησόμενον γινόμενον τῶν δεκάδων ἀπὸ τὰς δεκάδας καὶ οὕτω καθεξῆς, φροντίζοντες εἰς ἑκάστην ἀφαίρεσιν νὰ προσθέτωμεν εἰς ἕκαστον ψηφίον τοῦ διαιρετέου τόσας μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, ὅσαι ἀπαιτοῦνται, ἵνα ἐκτελῶνται αἱ ἀφαιρέσεις· ἔπειτα ὅμως πρέπει νὰ προσθέτωμεν ἰσαρίθμους μονάδας ὡς κρατούμενα καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον τῆς ἑπομένης ἀφαιρέσεως. Τότε ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς φαίνεται κατωτέρω.

Ἐνταῦθα λέγομεν 5 ἐπὶ 3 κάμνει 15 ἀπὸ 22 (ἐπροσθέσαμεν 2 δεκ. ἤτοι 20 μονάδας εἰς τὰς μονάδας τοῦ διαιρετέου, ἵνα ἐκτελεσθῇ ἡ ἀφαίρεσις), μένουν 7, κρατούμενα δὲ 2, (αἱ δύο δεκάδες προστίθενται εἰς τὸ ἑπόμενον ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου)· 5 ἐπὶ 5 δίδει 25 καὶ 2 τὰ κρατούμενα 27 ἀπὸ 36 (προσετέθησαν 3 ἑκατ., ἤτοι 30 δεκάδες), μένουν 9 καὶ 3 τὰ κρατούμενα· 5 ἐπὶ 7 κάμνει 35 καὶ 3 τὸ ὅλον 38 ἀπὸ 45 μένει 7 καὶ 4 τὰ κρατούμενα· 5 ἐπὶ 1 κάμνει 5 καὶ 4 τὰ κρατούμενα 9 ἀπὸ 9 μένει 0.

9562	1763
797	5

79. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται ὁ ἑξῆς κανών:

Κανών. *Ἵνα εὕρωμεν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο ἀριθμῶν, ὅταν εἶναι μονοψήφιον, ἂν μὲν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ ἔχωσιν ἰσάριθμα ψηφία, λαμβάνομεν τὸ πρῶτον πρὸς τὰ ἀριστερὰ ψηφίον τοῦ διαιρέτου καὶ παρατηροῦμεν πόσας φορὰς εἰσέρχεται εἰς τὸ πρῶτον πρὸς τὰ ἀριστερὰ ψηφίον τοῦ διαιρετέου ἢ εἰς τὰ δύο πρῶτα, ἂν ὁ διαιρετέος ἔχῃ ἓν ψηφίον περισσότερον. Τὸν οὕτως εὑρισκόμενον ἀριθμὸν πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν διαιρέτην. Ἂν τὸ γινόμενον ἀφαιρῆται ἀπὸ τὸν διαιρετέον καὶ δίδῃ ὑπόλοιπον μικρότερον τοῦ διαιρέτου, ὁ εὑρεθεὶς ἀριθμὸς εἶναι τὸ ἀκριβὲς πηλίκον, ἂν ὅμως τὸ γινόμενον εἶναι μεγαλείτερον τοῦ διαιρέτου, ἐλαττοῦμεν τὸν εὑρεθέντα ἀριθμὸν κατὰ μονάδα, μέχρις ὅτου δώσῃ γινόμενον μικρότερον τοῦ διαιρετέου, καὶ τοῦ ὁποίου ἡ διαφορὰ ἀπὸ τούτου νὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ διαιρέτου.*

* Γενικὴ περίπτωσις.

Διαίρεσις δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν ἐχόντων πηλίκον πολυψήφιον.

80. Ἔστω πρὸς ἐκτέλεσιν ἡ διαίρεσις 385673 : 562. Ἐὰν θέσωμεν δεξιὰ τοῦ διαιρέτου τρία μηδενικά, οὗτος γίνεται μεγαλείτερος τοῦ διαιρετέου,

ἐὰν θέσωμεν δύο μόνον, γίνεται μικρότερος· ἐκ τούτων ἐννοοῦμεν, ὅτι τὸ πηλίκον θὰ ἔχῃ τρία ψηφία.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον, θεωροῦμεν τὸν διαιρετέον ὡς ἀποτελούμενον ἀπὸ πολλὰ μέρη, ἅτινα εἶναι αἱ μονάδες τῶν διαφόρων τάξεων (ἁπλαῖ μονάδες, δεκάδες, ἑκατοντάδες κτλ.)· δυνάμεθα λοιπόν, καθὼς ἐμάθομεν, νὰ διαιρέσωμεν τὰ διάφορα αὐτοῦ μέρη καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ εὑρεθησόμενα πηλίκα. Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν τοιαῦτα μέρη ἀπὸ τὸν διαιρετέον, τὰ ὁποῖα διαιρούμενα διὰ τοῦ διαιρέτου νὰ δίδωσι πηλίκα μονοψήφια, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὰς ἀνωτάτας μονάδας. Ἐνταῦθα λαμβάνομεν πρῶτον τὸν ἀριθμὸν 3 856, τὸν ἀποτελούμενον ἐκ τῶν τεσσάρων πρὸς τὰ ἀριστερὰ ψηφίων τοῦ διαιρετέου, ὅστις διαιρούμενος διὰ 562 δίδει, καθὼς γνωρίζομεν, πηλίκον μονοψήφιον. Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν ταύτην, εὑρίσκομεν πηλίκον 6 καὶ ὑπόλοιπον 484· εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι, ἐὰν μερίσωμεν 3 856 ἑκατοντάδας εἰς 562 μέρη, ἕκαστον μέρος, ἤτοι τὸ πηλίκον 6, θὰ εἶναι ἑκατοντάδες, ὁμοίως καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῶν ἑκατοντάδων, ἤτοι ὁ 484, θὰ εἶναι ἑκατοντάδες. Τὰς 484 ἑκατοντάδας, ἐπειδὴ δὲν δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν διὰ 562, τρέπομεν εἰς κατωτέρας μονάδας, ὥστε αὗται μετὰ τῶν ἐν τῷ διαιρετέῳ εὑρισκομένων μονάδων τῆς αὐτῆς τάξεως διαιρούμεναι διὰ 562 νὰ δίδωσι πηλίκον μονοψήφιον. Αἱ 484 ἑκατοντάδες τρέπονται εἰς 4840 δεκάδας, αἵτινες μετὰ τῶν 7 τῶν ἐν τῷ διαιρετέῳ ἀποτελοῦσι τὸ ὅλον 4 847 δεκάδας· διαιροῦντες ταύτας διὰ 562 θὰ ἔχωμεν πηλίκον μονοψήφιον τὸν 8 καὶ ὑπόλοιπον 351.

$$\begin{array}{r|l} 3\,856 & 562 \\ \cline{2-2} 484 & 6 \end{array}$$

Ἐπειδὴ δὲ ἐμερίσαμεν 4 847 δεκάδ. εἰς 562 μέρη, εἶναι φανερόν, ὅτι ἕκαστον μέρος, ὅπερ εἶναι ἴσον τῷ ἀριθμῷ 8, θὰ παριστᾷ δεκάδας καὶ τὸ ὑπόλοιπον 351 θὰ εἶναι ὁμοίως δεκάδες. Τὰς 351 δεκάδας τρέπομεν εἰς 3 510 μονάδας, εἰς ταύτας δὲ προσθέτοντες καὶ τὰς ἐν τῷ διαιρετέῳ 3 θὰ ἔχωμεν 3 513 μονάδας, τὰς ὁποίας διαιροῦντες διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 562 εὑρίσκομεν πηλίκον 6 καὶ ὑπόλοιπον 141 μονάδας· Τὸ πηλίκον ἄρα τῆς διαιρέσεως εἶναι 6 ἑκατοντάδες, 8 δεκάδες καὶ 6 μονάδες, ἤτοι εἶναι ὁ ἀριθμὸς 686, τὸ δὲ ὑπόλοιπον 141. Πράγματι ὁ ἀριθμὸς 562 πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 686 δίδει 385 532, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ μέγιστον πολ-

$$\begin{array}{r|l} 4\,847 & 562 \\ \cline{2-2} 351 & 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 3\,513 & 562 \\ \cline{2-2} 141 & 6 \end{array}$$

λαπλάσιον τοῦ 562, τὸ περιεχόμενον εἰς τὸν διαιρετέον, διότι τὸ ἑπόμενον πολλαπλάσιον 562×687=386 094 εἶναι μεγαλείτερον τοῦ διαιρετέου· ὁ 686 εἶναι λοιπὸν τὸ ἀληθὲς πηλίκον.

385 6́7́3́	562
4 847	686
3 513	
141	

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται καὶ ἐκτελεῖται ὡς ἑξῆς: Δεξιὰ τοῦ διαιρετέου γράφομεν τὸν διαιρέτην ἐντὸς γωνίας τινός, ὡς φαίνεται ἐν τῷ παραδείγματι· ἔπειτα χωρίζομεν διὰ τόνου ἀριστερὰ τοῦ διαιρετέου τόσα ψηφία, ὅσα ἀπαιτοῦνται, ἵνα σχηματισθῇ ἀριθμὸς (μερικὸς διαιρετέος), ὅστις διαιρούμενος διὰ 562 νὰ δίδῃ πηλίκον μονοψήφιον. Ἐνταῦθα χωρίζομεν τέσσαρα ψηφία καὶ λέγομεν ὁ 562 εἰς τὸν 3856 ἢ ὁ 5 εἰς τὸν 38 ἢ κάλλιον, ἐπειδὴ τὸ δεύτερον ψηφίον τοῦ διαιρέτου εἶναι μεγαλείτερον τοῦ 5, λέγομεν ὁ 6 εἰς τὸν 38 χωρεῖ 6 φοράς. Τὸ ψηφίον 6, ὅπερ εἶναι τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ πηλίκου, γράφομεν ὑπὸ τὸν διαιρέτην καὶ πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τοῦτον, ἀφαιροῦντες δὲ τὸ γινόμενον αὐτῶν ἀπὸ τοῦ πρώτου μερικοῦ διαιρετέου εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 484, τὸ ὁποῖον εἶναι μικρότερον τοῦ διαιρέτου καὶ γράφεται κάτωθι τοῦ πρώτου μερικοῦ διαιρετέου. Δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου τούτου γράφομεν τὸ ἑπόμενον ψηφίον τοῦ διαιρετέου, ἤτοι τὸ 7, καὶ διαιροῦμεν τὸν οὕτω σχηματισθέντα ἀριθμὸν 4 847 (δεύτερον μερικὸν διαιρετέον) διὰ 562, λέγοντες πάλιν ὁ 6 εἰς τὸν 48 εἰσχωρεῖ 8 φοράς. Τὸ ψηφίον 8, ὅπερ εἶναι τὸ δεύτερον ψηφίον τοῦ πηλίκου, γράφομεν δεξιὰ τοῦ πρώτου ψηφίου 6 τοῦ πηλίκου καὶ πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν διαιρέτην, τὸ δὲ γινόμενον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸν δεύτερον μερικὸν διαιρετέον 4847 καὶ εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 351, τὸ ὁποῖον γράφομεν κάτωθι τοῦ μερικοῦ διαιρετέου καὶ καταβιβάζομεν δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου τούτου τὸ ἑπόμενον ψηφίον τοῦ δοθέντος διαιρετέου, ἤτοι τὸ 3. Οὕτω λαμβάνομεν 3 513, ὅστις εἶναι ὁ τρίτος μερικὸς διαιρετέος. Τοῦτον ὁμοίως διαιροῦντες εὑρίσκομεν τὸ τρίτον ψηφίον 6 τοῦ πηλίκου, τὸ ὁποῖον γράφομεν δεξιὰ τῶν δύο πρώτων, καὶ ὑπόλοιπον 141, ὅπερ εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως.

Παρατήρησις 1η. Ὅταν μερικός τις διαιρετέος εἶναι μικρότερος τοῦ διαιρέτου, τότε δεξιὰ τῶν εὑρεθέντων ψηφίων τοῦ πηλίκου γράφομεν 0 καὶ καταβιβάζομεν δεξιὰ τοῦ μερικοῦ διαιρετέου καὶ ἄλλο ἓν ψηφίον ἐκ τοῦ δοθέντος διαιρετέου, καὶ ταῦτα ἐξακολουθοῦμεν, μέχρις ὅτου καταστήσωμεν τὸν μερικὸν διαιρετέον μεγαλείτερον τοῦ διαιρέτου τόσον, ὥστε νὰ δίδῃ πηλίκον ἀριθμὸν μονοψήφιον.

Παράδειγμα

1 606 251	567
1 701	3009
5 251	
5 103	
148	

Παρατήρησις 2α. Ὅταν ὁ διαιρέτης ἔχῃ πολλὰ ψηφία καὶ τὸ πηλίκον ὁμοίως, τὰ γινόμενα τοῦ διαιρέτου ἐπὶ ἕνα ἕκαστον ψηφίον τοῦ πηλίκου γράφονται ὁλόκληρα, ἕκαστον ὑπὸ τὸν ἀντίστοιχον μερικὸν διαιρετέον, καὶ ἔπειτα γίνεται ἡ ἀφαίρεσις αὐτῶν. Διὰ τοῦ τρόπου τούτου, καὶ λάθος τι ἂν γίνῃ, δυνάμεθα νὰ τὸ εὕρωμεν εὐκολώτερον, καὶ ἂν ψηφία τινὰ τοῦ πηλίκου εὑρεθῶσιν ἴσα, ὡς φαίνεται εἰς τὸ παρακείμενον παράδειγμα, δὲν θὰ πολλαπλασιάζωμεν ἐκ νέου, διότι ἔχομεν γεγραμμένον ἤδη τὸ γινόμενον. Ὅταν μάλιστα ὁ διαιρέτης καὶ τὸ πηλίκον ἔχωσι πάρα πολλὰ ψηφία, τότε εὑρίσκομεν πρῶτον τὰ γινόμενα τοῦ διαιρέτου ἐπὶ ὅλους τοὺς μονοψηφίους ἀριθμούς, τὰ ὁποῖα γράφομεν κατὰ σειράν, καὶ οὕτω ἀποφεύγομεν νὰ πολλαπλασιάζωμεν ἕκαστον ψηφίον τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην, ἐπειδὴ ἔχομεν εὕρῃ τὸ γινόμενον ἐκ τῶν προτέρων.

Παράδειγμα

```
4 896 178 | 673
4 711     | 7 275
---------
  1 851
  1 346
  -----
    5 507
    4 711
    -----
      3 468
      3 365
      -----
        103
```

81. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται ὁ ἑξῆς γενικὸς κανὼν τῆς διαιρέσεως:

* Γενικὸς κανών.

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα δι' ἄλλου, χωρίζομεν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ διαιρετέου τόσα ψηφία, ὅσα χρειάζονται, ἵνα σχηματισθῇ ἀριθμὸς (πρῶτος μερικὸς διαιρετέος), ὅστις διαιρούμενος διὰ τοῦ διαιρετου νὰ δίδῃ πηλίκον μονοψήφιον· πρὸς τοῦτο χωρίζομεν ἀριστερὰ τοῦ διαιρετέου ὅσα ψηφία ἔχει ὁ διαιρέτης ἢ ἓν περισσότερον. Διαιροῦμεν τὸν μερικὸν τοῦτον διαιρετέον διὰ τοῦ διαιρέτου καὶ εὑρίσκομεν τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ πηλίκου. Πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ εὑρεθὲν ψηφίον καὶ τὸ γινόμενον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸν μερικὸν διαιρετέον, ἔπειτα καταβιβάζομεν δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου τὸ ἀμέσως ἑπόμενον ψηφίον τοῦ διαιρετέου καὶ λαμβάνομεν οὕτω τὸν δεύτερον μερικὸν διαιρετέον. Διαιροῦντες καὶ τοῦτον διὰ τοῦ διαιρέτου εὑρίσκομεν τὸ δεύτερον ψηφίον τοῦ πηλίκου, τὸ ὁποῖον γράφομεν δεξιὰ τοῦ πρώτου ψηφίου καὶ ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν *ἐπὶ τὸν διαιρέτην, τὸ δὲ γινόμενον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸν δεύτερον μερικὸν διαιρετέον. Ὁμοίως ἐξακολουθοῦντες εὑρίσκομεν καὶ τὰ ἄλλα ψηφία τοῦ πηλίκου. Ἐὰν συμβῇ μερικός τις διαιρετέος νὰ μὴ διαιρῆται διὰ τοῦ διαιρέτου, τότε γράφομεν 0 δεξιὰ τοῦ εὑρεθέντος μέρους τοῦ πηλίκου καὶ καταβιβάζομεν τὸ ἑπόμενον ψηφίον τοῦ διαιρετέου καὶ οὕτως ἐξακολουθοῦμεν τὴν διαίρεσιν μέχρι τέλους.*

Ἐν συντόμῳ πρὸς ἐκτέλεσιν μιᾶς μακρᾶς διαιρέσεως ἐκτελοῦμεν κατ' ἐπανάληψιν καὶ κατὰ σειρὰν τὰ ἑξῆς· *διαιροῦμεν, πολλαπλασιάζομεν, ἀφαιροῦμεν, καταβιβάζομεν ἓν ψηφίον.*

82. Διὰ νὰ ἀποφεύγωμεν τὰς ἀφαιρέσεις κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς διαιρέσεως, ὅταν μάλιστα ὁ διαιρέτης καὶ τὸ πηλίκον εἶναι πολυψήφιοι ἀριθμοί, ἐκτελοῦμεν τὴν πρᾶξιν ὡς ἑξῆς:

* Κανών. *Ἀρχίζοντες ἐξ ἀριστερῶν ἀφαιροῦμεν κατὰ σειρὰν ἕκαστον ψηφίον τοῦ διαιρέτου ἀπὸ τοῦ 9, τὸ δὲ τελευταῖον πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφίον ἀπὸ τοῦ 10· τὸν οὕτω προκύπτοντα ἀριθμόν, ὅστις* **συμπλήρωμα τοῦ διαιρέτου** *καλεῖται, γράφομεν ὑπεράνω τούτου.*

```
                  14633
45237598104     | 85367
 73165          |------
-----------       52991
5255409
  29266
-----------
2846758
 131697
-----------
 9784550
  131697
-----------
  9162474
    14633
-----------
  177107
```

Χωρίζομεν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ διαιρετέου τόσα ψηφία, ὅσα χρειάζονται, ἵνα λάβωμεν ἀριθμὸν (μερικὸν διαιρετέον), *ὅστις διαιρούμενος διὰ τοῦ διαιρέτου νὰ δίδῃ πηλίκον μονοψήφιον.*

Διαιροῦμεν τὸν πρῶτον μερικὸν διαιρετέον διὰ τοῦ διαιρέτου καὶ εὑρίσκομεν τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ πηλίκου. Πολλαπλασιάζομεν τὸ εὑρεθὲν ψηφίον τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸ εὑρεθὲν συμπλήρωμα τοῦ διαιρέτου καὶ τὸ γινόμενον προσθέτομεν εἰς τὸν πρῶτον μερικὸν διαιρετέον. Τοῦ προκύπτοντος ἀθροίσματος διαγράφομεν τὸ πρῶτον πρὸς τὰ *ἀριστερὰ ψηφίον, τὸ ὁποῖον πάντοτε πρέπει νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ εὑρεθὲν ψηφίον τοῦ πηλίκου. Ὁ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαγραφέντος ψηφίου ἀριθμὸς εἶναι τὸ ὑπόλοιπον, δεξιὰ τοῦ ὁποίου καταβιβάζομεν τὸ ἀκόλουθον ψηφίον τοῦ διαιρέτου καὶ ἐξακολουθοῦμεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὴν διαίρεσιν μέχρι τέλους.*

Σημ. 1η. Τὴν ἀπόδειξιν τῆς ὀρθότητος τοῦ κανόνος τούτου ἀποφεύγομεν, ἵνα μὴ ὑπερβῶμεν τὰ ὅρια τοῦ συγγράμματος.

Σημ. 2α. Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι μονοψήφιος, πρὸς εὕρεσιν τοῦ συμπληρώματος αὐτοῦ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ 10, οἷον τοῦ 8 τὸ συμπλήρωμα εἶναι 2, τοῦ 4 εἶναι 6 κ. τ. λ.

Σημ. 3η. Ἀντὶ νὰ γράφωμεν τὰ γινόμενα τοῦ συμπληρώματος ἐπὶ ἕκαστον ψηφίον τοῦ πηλίκου, δυνάμεθα ἀμέσως νὰ προσθέτωμεν τὰ γινόμενα τοῦ εὑρεθέντος ψηφίου τοῦ πηλίκου ἐπὶ ἕκαστον ψηφίον τοῦ συμπληρώματος μετὰ τοῦ ἀντιστοιχοῦντος ψηφίου τοῦ μερικοῦ διαιρετέου καί, ἂν εὕρωμεν μονοψήφιον ἀριθμόν, γράφομεν ὑπὸ τὸ ψηφίον τοῦτο, ἂν δὲ διψήφιον, γράφομεν τὰς μονάδας του, τὸ δὲ ψηφίον τῶν δεκάδων προσθέτομεν ὡς κρατούμενα εἰς τὸ ἑπόμενον ἄθροισμα.

* Συντομίαι.

83. *Συντομία 1η.* Ὅταν ὁ διαιρετέος εἶναι πολυψήφιος, ὁ δὲ διαιρέτης μονοψήφιος, τότε τὰ ὑπόλοιπα τῶν μερικῶν διαιρέσεων πρὸς συντομίαν ἢ οὐδόλως γράφομεν, πλὴν τοῦ τελευταίου, καὶ ἐκτελοῦμεν τὰς μερικὰς διαιρέσεις κατὰ νοῦν, ἢ γράφομεν αὐτὰ μεταξὺ τοῦ ἀριθμοῦ, ἐκ τοῦ ὁποίου προκύπτουσι, καὶ τοῦ ἑπομένου ψηφίου, μετὰ τοῦ ὁποίου ἀποτελοῦσι τὸν ἑπόμενον μερικὸν διαιρετέον.

Π.-χ. Εἰς τὴν διαίρεσιν 5 257 : 3.

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω λέγομεν ὁ 3 εἰς τὸν 5 εἰσέρχεται 1, μένει δὲ ὑπόλοιπον 2, τὸ ὁποῖον μετὰ τοῦ ἑπομένου ψηφίου ἀποτελεῖ τὸν ἀριθμὸν 22· ὁ 3 εἰς τὸν 22 χωρεῖ 7, μένει δὲ 1, τὸ ὁποῖον μετὰ τοῦ 7 ἀποτελεῖ 17· εἰς τοῦτον ὁ 3 χωρεῖ 5 καὶ μένει 2· ὁ 3 εἰς τὸν

25 χωρεῖ 8, μένει δὲ ὑπόλοιπον 1· ὥστε ἡ διαίρεσις 5 257 : 3 δίδει πηλίκον 1758 καὶ ὑπόλοιπον 1.

Τὰ ὑπόλοιπα πρὸς ἀποφυγὴν σφαλμάτων καλὸν εἶναι νὰ γράφωμεν ὡς ἑξῆς·

2 1 2 1
5 275 : 3 δίδει πηλίκον 1758 καὶ ὑπόλοιπον 1.

84. *Συντομία 2α*. Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι 10 ἢ 100 ἢ 1000, δηλ. ἀποτελεῖται ἐκ τῆς μονάδος ἀκολουθουμένης ὑπὸ μηδενικῶν, τότε χωρίζομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρετέου τόσα ψηφία, ὅσα εἶναι τὰ μηδενικά, ὑπὸ τῶν ὁποίων ἀκολουθεῖται ὁ διαιρέτης· καὶ τὰ μὲν χωρισθέντα ψηφία εἶναι τὸ ὑπόλοιπον, τὰ δ' ἀπομείναντα πρὸς τὰ ἀριστερὰ εἶναι τὸ πηλίκον.

Ἔστω ἡ διαίρεσις 5 879 : 10. Ἐνταῦθα πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρετέου ἀποκόπτομεν ἓν ψηφίον, τὸ 9· καὶ τοῦτο μὲν εἶναι τὸ ὑπόλοιπον, ὁ δὲ ἀπομείνας ἀριθμὸς 587 τὸ πηλίκον.

Εἰς τὴν διαίρεσιν 5 879 : 100 πηλίκον εἶναι 58 καὶ ὑπόλοιπον 79. Ὁ λόγος εἶναι ὁ ἑξῆς:

Εἰς τὴν διαίρεσιν 5 879 : 10 πρόκειται νὰ εὑρεθῇ πόσας φορὰς ὁ 10 ἢ ἡ μία δεκὰς χωρεῖ εἰς τὸν 5 879. Εἶναι δὲ φανερόν, ὅτι ὁ 10 δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ χωρῇ εἰς τὰς ἁπλᾶς μονάδας, ἀλλὰ μόνον εἰς τὰς δεκάδας· εἰς τὰς 587 δεκάδας τοῦ διαιρετέου ὁ 10 ἢ ἡ μία δεκὰς χωρεῖ 587 φοράς. Ὁ ἀριθμὸς λοιπὸν οὗτος εἶναι τὸ πηλίκον, αἱ δὲ μένουσαι 9 μονάδες εἶναι τὸ ὑπόλοιπον.

Εἰς τὴν διαίρεσιν 5 879 : 100 πρόκειται νὰ εὑρεθῇ πόσας φορὰς ὁ 100 ἢ ἡ μία ἑκατοντὰς χωρεῖ εἰς τὸν 5 879. Εἶναι δὲ φανερόν, ὅτι οὔτε εἰς τὰς μονάδας οὔτε εἰς τὰς δεκάδας δύναται νὰ περιέχηται ὁ 100 παρὰ μόνον εἰς τὰς ἑκατοντάδας. Εἰς τὰς 58 λοιπὸν ἑκατοντάδας ὁ 100 ἢ ἡ μία ἑκατοντὰς χωρεῖ 58 φοράς, μένουν δὲ αἱ 79 μονάδες. Πηλίκον ἄρα εἶναι ὁ 58 καὶ ὑπόλοιπον 79.

85. *Συντομία 3η*. Ὅταν τὰ τελευταῖα ψηφία τοῦ διαιρέτου εἶναι μηδενικά, ὡς τοῦ 6 500, ὁσαδήποτε καὶ ἂν εἶναι, ἀποκόπτομεν ταῦτα καὶ ἴσον ἀριθμὸν ψηφίων πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρετέου, ἐκ-

τελοῦμεν δὲ τὴν διαίρεσιν τῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι ἀπέμειναν. Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης θὰ εἶναι τὸ ἀληθὲς πηλίκον τῆς διαιρέσεως τῶν δοθέντων ἀριθμῶν· ἵνα ὅμως εὕρωμεν τὸ ὑπόλοιπον, πρέπει εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου τῆς ἐκτελεσθείσης διαιρέσεως νὰ γράψωμεν καὶ τὰ ἀποκοπέντα ψηφία τοῦ διαιρετέου.

Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ 879 587 διὰ 57 000. Τὸ ζητούμενον πηλίκον θὰ εἶναι ὁ ἀριθμός, ὅστις δεικνύει πόσας φορὰς αἱ 57 χιλιάδες εἰσχωροῦσιν εἰς τὸν 879 587 ἢ καὶ πόσας φορὰς δυνάμεθα νὰ ἀφαιρέσωμεν τὰς 57 χιλιάδας ἀπὸ τοῦ 879 587. Ἀλλ' ἐπειδὴ αἱ 57 χιλιάδες δὲν ἀφαιροῦνται ἀπὸ τὰς μονάδας, οὔτε ἀπὸ τὰς δεκάδας, οὔτε ἀπὸ τὰς ἑκατοντάδας, παρὰ μόνον ἀπὸ τὰς 879 χιλιάδας, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν πόσας φορὰς αἱ 57 χιλιάδες ἀφαιροῦνται ἀπὸ τὰς 879 χιλιάδας, ἤτοι πόσας φορὰς εἰσχωρεῖ εἰς τὸν 879 ὁ 57, εὑρίσκομεν δέ, ὅτι εἰσχωρεῖ 15 φορὰς (πηλίκον). μένει δὲ καὶ ὁ 24, ὅστις ὡς ὑπόλοιπον χιλιάδων παριστᾷ χιλιάδας. Αἱ χιλιάδες αὗται μετὰ τῶν 587 μονάδων, αἵτινες ἐξ ἀρχῆς ἀπέμειναν, ἀποτελοῦσι τὸ ὁλικὸν ὑπόλοιπον 24 587 τῆς διαιρέσεως τῶν δοθέντων ἀριθμῶν, ὁ δὲ 15 εἶναι τὸ πηλίκον.

879(587	57(000
309	15
24 587	

7 589(02	29(00
1 78	261
049	
2002	

86. *Συντομία 4η.* Ὅταν ὅλα τὰ ψηφία τοῦ διαιρέτου εἶναι 9, τότε ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν εὐκολώτατα διὰ τῆς μεθόδου τοῦ συμπληρώματος·

Παράδειγμα *1 συμπλήρωμα*

579 245	99
5842	5850
8504	
5095	

ἢ ὡς ἑξῆς: Ἔστω ὡς παράδειγμα τὸ ἀνωτέρω 579 245 : 99.

Χωρίζομεν δύο ψηφία δεξιὰ τοῦ διαιρετέου.

Ὁ ἀριθμὸς 5792 εἶναι τὸ πηλίκον τῆς πρώτης μερικῆς διαιρέσεως. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ὑπολοίπου εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα. $5792+45=5837$ Τοῦτο εἶναι τὸ ὑπόλοιπον· οὕτως ἐξετελέσθη μία μερικὴ διαίρεσις. Χωρίζομεν πάλιν δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου τούτου τῆς πρώτης μερικῆς διαιρέσεως δύο ψηφία, ἤτοι τὸν 37, καὶ τὸν ἀπομείναντα ἀριθμὸν 58 προσθέτομεν εἰς τὸ πρῶτον μέρος 5 792 τοῦ πηλίκου, εὑρίσκομεν δὲ 5 850, ὅπερ εἶναι καὶ τοῦτο ὅλον ἢ μέρος τοῦ πηλίκου· ἔπειτα προσθέτομεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 58 μετὰ τοῦ ἀποκοπέντος 37, τὸ ἄθροισμα αὐτῶν 95 εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς δευτέρας μερικῆς διαιρέσεως καί, ἐπειδὴ εἶναι μικρότερον τοῦ διαιρέτου, ἡ πρᾶξις ἐξετελέσθη καὶ εὑρέθη πηλίκον μὲν ὁ 5 850, ὑπόλοιπον δὲ ὁ 95.

Ἡ ὀρθότης τῶν ἀνωτέρω πράξεων ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς :

Ὁ ἀριθμὸς 579 245 περιέχει 5 792 ἑκατοντάδας καὶ 45 μονάδας. Ἀπὸ ἑκάστης ἑκατοντάδος, ἤτοι ἀπὸ τοῦ 100, ὁ 99 ἀφαιρεῖται μίαν φοράν, μένει δὲ καὶ ὑπόλοιπον 1· ἐπομένως, ἐὰν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν θεωρήσωμεν ἀναλελυμένον εἰς τὰς ἑκατοντάδας του, θὰ ἔχωμεν $100+100+100+\ldots+100+45$, ἤτοι 5 792 φορὰς τὸν 100 καὶ 45 μονάδας. Ἐὰν δὲ ἀπὸ ἑκάστης ἑκατοντάδος ἀφαιρέσωμεν 99, θὰ κάμωμεν 5 792 ἀφαιρέσεις, αἵτινες θὰ παριστῶσι τὸ πηλίκον, θὰ μείνῃ δὲ καὶ ὑπόλοιπον $5\,792+45$ μονάδες, ἤτοι 5 837. Εἰς τὰς 58 ἑκατοντάδας τοῦ ἀριθμοῦ τούτου ὁ 99 εἰσέρχεται πάλιν 58 φοράς, μένει δὲ ἐξ αὐτῶν καὶ ὑπόλοιπον 58 μονάδες, αἵτινες μετὰ τῶν 37 τοῦ ἀριθμοῦ γίνονται $58+37$, ἤτοι 95, ἀπὸ τὰς ὁποίας δὲν ἀφαιρεῖται πλέον ὁ 99. Ὥστε εἰς τὸν ἀριθμὸν 579 245 ὁ 99 εἰσέρχεται $5\,792+58$, ἤτοι 5 850 φοράς, μένει δὲ καὶ ὑπόλοιπον 95. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι εἰς τὸν ἀριθμὸν 37 986 345 752 ὁ 999 εἰσέρχεται 38 024 370 φοράς, μένει δὲ καὶ ὑπόλοιπον 122.

Εἰς τὸ παράδειγμα τοῦτο θὰ ἀφαιρῶμεν τὸν 999 ἀπὸ τῶν χιλιάδων τοῦ διαιρετέου, ὁπότε ἐξ ἑκάστης χιλιάδος θὰ μένῃ ὑπόλοιπον μία μονάς.

Αἱ πράξεις διατάσσονται ὡς ἑξῆς:

Παράδειγμα α'

579245	99
45	5792
5837	58
37	5850
95	

Παράδειγμα β'

37986345752	999
752	37986345
37987097	37987
97	38
38084	38024370
84	
122	

Βάσανος τῆς διαιρέσεως καὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

87. Γνωρίζομεν, ὅτι εἰς πᾶσαν διαίρεσιν ὁ διαιρετέος ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον, ἀφοῦ εἰς τὸ γινόμενον τοῦτο προστεθῇ καὶ τὸ ὑπόλοιπον. Ἵνα λοιπὸν μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν διαιρέσεώς τινος δοκιμάσωμεν, ἂν τὸ εὑρεθὲν πηλίκον καὶ τὸ ὑπόλοιπον εἶναι τὰ ἀκριβῆ, πολλαπλασιάζομεν τὸ πηλίκον ἐπὶ τὸν διαιρέτην καὶ εἰς τὸ γινόμενον προσθέτομεν τό ὑπόλοιπον, ἂν ὑπάρχῃ, ἐὰν δὲ εὕρωμεν τὸν διαιρετέον, τότε συμπεραίνομεν, ὅτι ἡ διαίρεσις ἐγένετο ἄνευ λάθους.

Ἐὰν δὲ θέλωμεν νὰ κάμωμεν τὴν δοκιμὴν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, διαιροῦμεν τὸ γινόμενον διὰ τοῦ ἑνὸς παράγοντος καί, ἂν ἡ πρᾶξις ἐγένετο ἄνευ λάθους. πρέπει ὡς πηλίκον νὰ εὕρωμεν τὸν ἄλλον παράγοντα, ὑπόλοιπον δὲ μηδέν. Ὁ λόγος εἶναι φανερός.

Βάσανος τῆς διαιρέσεως διὰ τοῦ σταυροῦ.

88. Ἔστω ὡς παράδειγμα ἡ διαίρεσις.

8756 294	5876
28802	1 490
52989	
1054	

1η	2α
8	5
4	5-1=4
3η	4η

Διὰ νὰ δοκιμάσωμεν, ἂν ἡ διαίρεσις ἐγένετο ἄνευ λάθους, προσθέτομεν ὅλα τὰ μικρότερα τοῦ 9 ψηφία τοῦ διαιρέτου, ὅπως καὶ εἰς τὴν βάσανον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (§ 55) ἐμάθομεν, καὶ τὸ μονοψήφιον ἄθροισμα, εἰς τὸ ὁποῖον θὰ καταλήξωμεν, γράφομεν εἰς τὴν 1ην γωνίαν ἑνὸς σταυροῦ. Εἰς τὸ προκείμενον παράδειγμα λέγομεν 6 καὶ 7 τὸ ὅλον 13, 3 καὶ 1 κάμνουν 4 καὶ 8 κάμνουν 12, 2 καὶ 1 γίνονται 3 καὶ 5 τὸ ὅλον 8.

Ἔπειτα κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρίσκομεν καὶ ἐκ τοῦ πηλίκου τὸν ἀριθμὸν 5, τὸν ὁποῖον γράφομεν εἰς τὴν δευτέραν γωνίαν τοῦ σταυροῦ. Πολλαπλασιάζοντες τὰ δύο ταῦτα ψηφία καὶ προσθέτοντες, ὡς ἀνωτέρω, τὰ ψηφία τοῦ γινομένου 40 εὑρίσκομεν 4, τὸ ὁποῖον γράφομεν εἰς τὴν 3ην γωνίαν τοῦ σταυροῦ. Ἐὰν ἤδη προσθέσωμεν, ὡς ἀνωτέρω, τὰ ψηφία τοῦ διαιρετέου καὶ ἔπειτα τοῦ ὑπολοίπου, καὶ ἀφαιρέσωμεν τὰ δύο ἐξαγόμενα, εὕρωμεν δὲ τὸν ἐν τῇ 3ῃ γωνίᾳ γεγραμμένον ἀριθμόν, ἡ πρᾶξις εἶναι πιθανὸν ὅτι ἐγένετο ἄνευ λάθους. Ἐκ τοῦ διαιρετέου εὑρίσκομεν 5, ἐκ τοῦ ὑπολοίπου 4, ἡ διαφορὰ εἶναι 4, ἄρα ἡ πρᾶξις πιθανὸν νὰ εἶναι ἀκριβής.

ΣΗΜ. Κατὰ τὴν βάσανον τῆς διαιρέσεως διὰ τοῦ σταυροῦ, ἐὰν συμβῇ τὸ ἐκ τῶν ψηφίων τοῦ ὑπολοίπου μονοψήφιον ἄθροισμα νὰ μὴ ἀφαιρῆται ἀπὸ τοῦ ἐκ τῶν ψηφίων τοῦ διαιρετέου μονοψηφίου ἀθροίσματος, τότε προσθέτομεν εἰς τοῦτο τὸν 9, καὶ ἔπειτα ἐκτελοῦμεν τὴν ἀφαίρεσιν, ἥτις τότε θὰ εἶναι πάντοτε δυνατή.

* Ἰδιότητες τῆς διαιρέσεως.

89. Εἰς πᾶσαν διαίρεσιν ἰσχύουσιν ἀλήθειαί τινες, αἱ ὁποῖαι πολλάκις μεγάλως εὐκολύνουσι καὶ συντομεύουσι τὴν διαίρεσιν. Αὗται εἶναι αἱ ἑξῆς:

90. *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν γινόμενον δι' ἑνὸς τῶν παραγόντων αὐτοῦ, ἀρκεῖ νὰ ἐξαλείψωμεν τὸν παράγοντα τὸν ἴσον πρὸς τὸν διαιρέτην.*

Ἐὰν π. χ. διαιρέσωμεν τὸ γινόμενον $5\times7\times6$ διὰ τοῦ 6, τὸ πηλίκον εἶναι 5×7, διότι τοῦτο πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην 6 δίδει $5\times7\times6$, ἤτοι τὸν διαιρετέον.

91. *Ἵνα διαιρέσωμεν γινόμενον δι' ἑνὸς ἀριθμοῦ, ὅστις διαιρεῖ ἀκριβῶς ἕνα τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου, διαιροῦμεν μόνον τὸν παράγοντα τοῦτον.*

Π. χ. Ἐὰν διαιρέσωμεν τὸ γινόμενον $5 \times 12 \times 6$ διὰ τὸ 3, τὸ πηλίκον θὰ εἶναι $5 \times 4 \times 6$ ἢ $5 \times 12 \times 2$, διότι καὶ τὸ πρῶτον πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην δίδει $5 \times 12 \times 6$, ἤτοι τὸν διαιρετέον, καὶ τὸ δεύτερον ὁμοίως.

92. *Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν διαιρετέον καὶ διαιρέτην ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τὸ πηλίκον μένει τὸ αὐτό·* ἂν δὲ ὑπάρχῃ καὶ ὑπόλοιπον, πολλαπλασιάζεται καὶ τοῦτο ἐπὶ τὸν ἴδιον ἀριθμόν.

Π. χ. Ἂν ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν 53 διὰ 8, εὑρίσκομεν πηλίκον 6 καὶ ὑπόλοιπον 5. Ἂν ὁ 53 σημαίνει ἁπλᾶς μονάδας, οἷον φράγκα, καὶ ὁ 8 ὁμοίως, τότε ὁ 6 σημαίνει πόσας φορὰς δυνάμεθα νὰ ἀφαιρέσωμεν 8 φρ. ἀπὸ 53 φρ ὁ δὲ 5 σημαίνει τὰ φράγκα, τὰ ὁποῖα μένουν. Ἐὰν ἤδη ὑποθέσωμεν, ὅτι ὁ 53 σημαίνει δίφραγκα καὶ ὁ 8 ὁμοίως, τότε πάλιν ὁ 6 σημαίνει, ὅτι τόσας φορὰς δυνάμεθα νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ 53 δίφραγκα 8 τοιαῦτα, θὰ μείνουν δὲ καὶ 5 δίφραγκα ἤ, ὅπερ ταὐτό, τὰ 8×2 φράγκα 6 φορὰς δυνάμεθα νὰ τὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὰ 53×2 φράγκα, θὰ μείνωσι δὲ καὶ 5×2 τοιαῦτα· ὥστε τὸ πηλίκον τοῦ 53×2 διὰ 8×2 εἶναι πάλιν 6, ὑπόλοιπον δὲ 5×2. Ὑποθέτοντες ὅτι ὁ 53 παριστᾷ πεντόφραγκα καὶ ὁ 8 ὁμοίως, ἀποδεικνύομεν ὅτι 53×5 διὰ 8×5 δίδει πηλίκον πάλιν 6 καὶ ὑπόλοιπον 5×5.

Ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι ὁ 15 παριστᾷ δωδεκάδας καὶ ὁ 3 ὁμοίως, τότε εἶναι φανερόν, ὅτι πάλιν αἱ τρεῖς δωδεκάδες θὰ εἰσχωρῶσιν εἰς τὰς 15 τοιαύτας ἀκριβῶς 5 φοράς, τὸ πηλίκον λοιπὸν 5 ἔμεινε τὸ αὐτό.

93. *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ γινομένου πολλῶν ἄλλων, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμὸν κατὰ σειρὰν δι' ἑκάστου παράγοντος τοῦ γινομένου.*

Ἂν π. χ. ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν 216 διὰ τοῦ $2 \times 3 \times 4$, ἐκτελοῦμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν καὶ εὑρίσκομεν $2 \times 3 \times 4 = 24$, διαιροῦμεν δὲ ἔπειτα τὸν 216 διὰ 24 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 9. Τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 9 θέλομεν εὕρῃ, ἂν διαιρέσωμεν τὸν 216 πρῶτον διὰ 2, κατόπιν τὸ εὑρεθὲν πηλίκον διὰ 3 καὶ τὸ νέον 4.

Διότι ὁ 216 εἶναι ἴσος μὲ 24×9 ἢ μὲ $2 \times 3 \times 4 \times 9$. Ἐὰν τὸν ἀριθμὸν τοῦτον, ὅστις εἶναι αὐτὸς ὁ διαιρετέος, διαιρέσωμεν πρῶτον διὰ 2, θὰ εὕρωμεν $3 \times 4 \times 9$. Ἐὰν δὲ τοῦτον διαιρέσωμεν διὰ 3, θὰ εὕρωμεν 4×9· διαιροῦντες τέλος τὸ νέον τοῦτο πηλίκον διὰ 4 εὑρίσκομεν πάλιν 9.

Προβλήματα στοιχειώδη.

94. *Στοιχειῶδες πρόβλημα* λέγεται τὸ πρόβλημα, τὸ ὁποῖον λύεται διὰ μιᾶς διαιρέσεως ἢ δι' ἑνὸς πολλαπλασιασμοῦ.

Ὅταν δίδωται ἡ τιμὴ μιᾶς μονάδος καὶ ζητῆται ἡ τιμὴ πολλῶν μονάδων, τὸ πρόβλημα λύεται δι' ἑνὸς πολλαπλασιασμοῦ καὶ εἶναι στοιχειῶδες.

Ὅταν δίδωται ἡ τιμὴ πολλῶν μονάδων καὶ ζητῆται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος, τὸ πρόβλημα λύεται διὰ μιᾶς διαιρέσεως καὶ εἶναι στοιχειῶδες.

Προβλήματα.

1) Πόσας τουρκικὰς λίρας κάμνουν 756 γρόσια; (μέτρησις).

Ἐὰν ἀπὸ τὰ 756 γρόσ. ἀφαιρέσωμεν 108 γρόσ., θὰ κάμωμεν μίαν λίραν. Ἀπὸ τὰ 648 γρόσ. τὰ ὁποῖα ἔμειναν, ἀφαιροῦμεν ἄλλα 108 γρόσ. καὶ θὰ ἔχωμεν ἄλλην μίαν λίραν· ἐὰν ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπον ἀφαιρέσωμεν διὰ τρίτην φορὰν τὸν 108, θὰ ἔχωμεν καὶ τρίτην λίραν, καὶ γενικῶς θὰ ἔχωμεν τόσας λίρας, ὅσας φορὰς ἀφαιρέσομεν ἀπὸ 756 γρόσ. τὰ 108 γρόσ., ἤτοι ὅσας φορὰς χωρεῖ εἰς τὸν 756 ὁ 108. Ἀπ. 7 τουρκ. λίρ.

2) Πόσα εἰκοσάφραγκα κάμνουν 855 γρόσια; (μέτρησις). Ἀπ. 9.

3) Ἓν φράγκον ἔχει 100 λεπτά, 7 800 λεπτὰ πόσα φράγκα κάμνουν; (μέτρησις). Ἀπ. 78 φράγκ.

4) 562 λεπτὰ πόσα φράγκα κάμνουν;

Ἀπ. 5 φράγκ. μένουν δὲ καὶ 62 λεπτά

5) Μία ἀγγλικὴ λίρα ἔχει 120 γρόσ. Πόσας ἀγγλικὰς λίρας ἀποτελοῦσι 1080 γρόσια; Ἀπ. 9.

6) Ἓν μετζήτιον ἔχει 20 γρόσ., 1080 γρόσ. πόσα μετζήτια κάμνουν; Ἀπ. 54 μετζ.

7) Ἡ ἀγγλικὴ λίρα ἔχει 20 σελίνια (νόμισμα ἀγγλικόν) πόσα γρόσ. εἶναι τὸ ἓν σελίνιον καὶ 1080 γρόσ. Πόσα σελίνια κάμνουν;

'Απ. Τὸ σελίνιον ἔχει 6 γρόσ., τὰ 1080 γρόσ. εἶναι 180 σελίνια.

8) 65 ἀγγλικαὶ λίραι πόσαι τουρκικαὶ εἶναι;

'Απ. 72 τουρκ. λίραι καὶ 24 γρόσ.

'Οδηγία. Τρέπομεν πρῶτον τὰς ἀγγλικὰς λίρας εἰς γρόσ. καὶ ταῦτα εἰς τουρκικάς.

9) 35 εἰκοσάφρ. πόσαι τουρκικαὶ λίρα εἶναι;

'Απ. 30 τουρκ. λίραι καὶ 85 γρόσ.

'Οδηγία. Τρέπομεν τὰ εἰκοσάφρ. εἰς γρόσ. καὶ ταῦτα εἰς τουρκ. λίρας.

10) 56 ἀγγλικαὶ λίραι πόσα εἰκοσάφρ. κάμνουν;

'Απ. 70 εἰκοσάφρ. καὶ 70 γρόσ.

11) Τὸ μέτρον διαιρεῖται εἰς 100 μέρη, δακτύλους, κοινῶς πόντους λεγομένους. Ὁ πῆχυς (ἐνδεζέ) ἰσοδυναμεῖ πρὸς 65 τοιούτους δακτ., ἡ δὲ ὑάρδα πρὸς 91 δακτ. Νὰ εὕρωμεν 85 μέτρα πρὸς πόσους πήχεις ἰσοδυναμοῦν; 'Απ. 130 πήχεις καὶ περιπλέον 50 δακτύλους.

'Οδηγία. Τρέπομεν τὰ μέτρα εἰς δακτύλους καὶ τούτους εἰς πήχεις.

12) 72 πήχεις πόσαι ὑάρδαι εἶναι; 'Απ. 51 ὑάρδ. καὶ 39 δάκτ.

'Οδηγία. Τρέπομεν τοὺς πήχεις εἰς δακτύλους καὶ τούτους εἰς ὑάρδας.

13) Νὰ τραπῶσιν 150 μέτρα εἰς ὑάρδας. 'Απ. 164 ὑάρδ. καὶ 76 δάκτ.

14) 4 800 δράμια πόσαι ὀκάδες εἶναι; 'Απ. 12.

15) 500 ὀκάδες πόσα χιλιόγραμμα εἶναι;

'Οδηγία. Τρέπομεν τὰς 500 ὀκάδας εἰς 640000 γραμμάρια, ταῦτα δέ, ἐπειδὴ τὸ χιλιόγρ. ἔχει 1000 γραμμ., εἶναι 640 χγ.

16) 250 χγ. πόσαι ὀκάδες εἶναι;

'Απ. 250 χγ. εἶναι 250000 γραμμ., ταῦτα δέ, ἐπειδὴ ἡ ὀκὰ ἔχει 1280 γραμμ., εἶναι 195 ὀκ. καὶ 400 γραμμ.

17) Ἓν τσεκίον ξύλων εἶναι 250 χγ., πόσα τσεκία εἶναι 1700 ὀκ.;

'Απ. 8 τσεκία καὶ 176 χγ.

'Οδηγία. Τρέπομεν τὰς ὀκάδας εἰς χιλιόγρ, καὶ ταῦτα εἰς τσεκία.

18) Ἠγόρασέ τις 5 ὀκ. ζαχάρεως καὶ ἐπλήρωσε 15 γρόσ. Πόσα γρόσ. ἠγόρασεν ἑκάστην ὀκάν;

Λύσις. 'Απὸ τὰ 15 γρόσ. ἀφαιροῦμεν τόσα, ὅσαι εἶναι αἱ ὀκάδες, ἤτοι 5, καὶ διαμερίζομεν ταῦτα εἰς ἑκάστην ὀκάν. Ἐκ τῶν ὑπολοίπων 10 πάλιν ἀφαιροῦμεν 5 καὶ διαμερίζομεν ταῦτα εἰς ἑκάστην ὀκάν· τώρα εἰς ἑκάστην ὀκὰν θὰ ἀναλογοῦν ἀπὸ 2 γρόσ. μένει καὶ ὑπόλοιπον 5 γρόσ., τὰ ὁποῖα ἐκ τρίτου διαμερίζομεν, καὶ τότε εἰς ἑκάστην ὀκὰν θὰ ἀναλογοῦν 3 γρόσ. Ὥστε ὅσας ἀφαιρέσεις ἐκάμομεν, τόσοι μερισμοὶ θὰ γίνουν καὶ τόσα γρόσια θὰ ἀναλογοῦν εἰς ἑκάστην ὀκάν.

19) Ἐὰν 5 ὀκ. βουτύρου ἀξίζουν 60 γρόσ., πόσον ἀξίζει ἡ ὀκά; (μερισμός). Ἀπ. 12 γρόσ.

20) 15 ὀκ. ζακχάρεως ἀξίζουν 45 γρόσ. Πόσα γρόσια ἀξίζουν αἱ 4 ὀκάδες;

Ὁδηγία. Εὑρίσκομεν πρῶτον, ὅτι ἡ μία ὀκὰ ἀξίζει 3 γρόσια, καὶ ἔπειτα ὅτι αἱ 4 ὀκ. ἀξίζουν 12 γρόσ.

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος τούτου βλέπομεν ὅτι,

Ὅταν μᾶς δίδωται ἡ ἀξία πολλῶν μονάδων, πρὸς εὕρεσιν τῆς ἀξίας ἄλλου ἀριθμοῦ μονάδων εὑρίσκομεν πρῶτον τὴν ἀξίαν τῆς μιᾶς μονάδος.

21) 8 ὀκάδες οἴνου ἀξίζουν 16 γρόσ. Πόσον ἀξίζουν αἱ 6 ὀκάδες; Ἀπ. 12.

22) 19 πήχ. ὑφάσματος ἠγοράσθησαν ἀντὶ 76 γροσ. Πόσα γρόσ. ἀξίζουν 6 πήχεις; Ἀπ. 24 γρόσ.

23) Εἰς ἓν δένδρον κάθηνται 54 στρουθία, εἰς ἄλλο δὲ δένδρον κάθηνται 28 τοιαῦτα· πόσα πρέπει νὰ φύγωσιν ἀπὸ τοῦ πρώτου καὶ νὰ μεταβοῦν εἰς τὸ δεύτερον, ἵνα εὑρίσκωνται καὶ εἰς τὰ δύο δένδρα ἰσάριθμα στρουθία; πόσα δέ, διὰ νὰ ἔχῃ τὸ πρῶτον 6 περιπλέον; Ἀπ. 13 πρέπει νὰ μεταβῶσιν ἐκ τοῦ πρώτου εἰς τὸ δεύτερον, ἵνα ἔχωσιν ἰσάριθμα, ἢ 10 μόνον, διὰ νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὸ πρῶτον 6 περιπλέον.

24) Γεωργὸς θέλει νὰ ἀνταλλάξῃ σῖτον μὲ ὕφασμα· καὶ τοῦ μὲν σίτου ἡ ὀκὰ ἀξίζει 35 παράδες, τοῦ δὲ ὑφάσματος ὁ πῆχυς ἀξίζει 75 παράδες. Πόσας ὀκάδας σίτου πρέπει νὰ δώσῃ, διὰ νὰ λάβῃ 14 πήχεις ὑφάσματος; Ἀπ. 30 ὀκ.

Ὁδηγία. Εὑρίσκομεν πρῶτον τὴν ἀξίαν τοῦ ὑφάσματος καὶ μετὰ ταῦτα πόσαι ὀκάδες σίτου ἀντιστοιχοῦν εἰς τοιαύτην ἀξίαν.

25) Ἄνθρωπός τις ἔχει 72 σφυγμοὺς εἰς κάθε πρῶτον λεπτόν, εἰς πόσας ὥρας θὰ γίνουν 12960 σφυγμοί; Ἀπ. 3 ὥρας.

26) Πόσαι ὧραι, πρῶτα λεπτὰ καὶ δεύτερα εἶναι 5675'' λεπτά.
Ἀπ. 1 ὥρ., 34' καὶ 35''.

27) Ἔμπορός τις ἔχει 35 πήχ. ὑφάσματος, τοῦ ὁποίου ὁ πῆχυς ἀξίζει εἰς αὐτὸν 3 γρόσ. ἔχει δὲ καὶ 60 πήχ. ἄλλου εἴδους ἀξίας 5 γρ. Ἐπώλησε ταῦτα καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ πρώτου ἐκέρδησε 25 γρόσ., ἐκ δὲ τοῦ δευτέρου 45. Ἂν ἐπώλει καὶ τὰς δύο ποιότητας μὲ τὴν αὐτὴν τιμήν, πόσον ἔπρεπε νὰ πωλήσῃ τὸν πῆχυν, διὰ νὰ κερδήσῃ τὰ αὐτὰ χρήματα; Ἀπ. 5.

28) Πόσαι δεκάδες κάμνουν 1 χιλιάδα καὶ πόσαι 1 ἑκατοντάδα χιλιάδων; Ἀπ. 1η 100 δεκ., 2α 10000 δεκ.

29) Πόσαι ἑκατοντάδες κάμνουν 1 δεκάδα χιλιάδων καὶ πόσαι 1 ἑκατοντάδα χιλιάδων; Ἀπ. 1η 100, 2α 1000.

30) 8 δεκάδες χιλιάδων ἐκ πόσων ἑκατοντάδων (μονάδων τρίτης τάξεως, ἀποτελοῦνται; Ἀπ. Ἐξ 800 ἑκατοντάδων.

31) 4 ἑκατοντάδες χιλιάδων ἐκ πόσων δεκάδων χιλιάδων, πόσων χιλιάδων καὶ πόσων δεκάδων (μονάδων δευτέρας τάξεως) ἀποτελοῦνται;
Ἀπ. 1η 40, 2α 400, 3η 4000.

32) 5 χιλιάδες ἐκ πόσων δεκάδων (μονάδων δευτέρας τάξεως) γίνονται; Ἀπ. 500.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ

ΠΕΡΙ ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΟΣ

Ὁρισμοί.

95. Ὅταν ἡ διαίρεσις εἶναι τελεία, δηλ. ὅταν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ τινος δι' ἄλλου εἶναι 0, τότε ὁ πρῶτος λέγεται *διαιρετὸς* διὰ τοῦ δευτέρου, ὁ δὲ δεύτερος λέγεται *διαιρέτης* τοῦ πρώτου. Οἷον ὁ 15 λέγεται *διαιρετὸς* διὰ 5, ὁ δὲ 5 *διαιρέτης* τοῦ 15.

Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει, ἐπειδὴ ὁ διαιρετέος 15 εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου 5 ἐπὶ τὸ πηλίκον 3, ὁ 15 εἶναι *πολλαπλάσιον* τοῦ 5, ὁ δὲ 5 *παράγων* τοῦ 15. Τὰ αὐτὰ ἀκριβῶς λέγομεν διὰ τοὺς 35 καὶ 7. Ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι αἱ ἑπόμεναι ἐκφράσεις εἶναι ἰσοδύναμοι:

Ὁ 35 εἶναι διαιρετὸς διὰ 7.	Ὁ 35 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 7.
Ὁ 7 εἶναι διαιρέτης τοῦ 35.	Ὁ 7 εἶναι παράγων τοῦ 35.

Ἐπειδὴ $35=7+7+7+7+7$, ὁ 7 λέγεται καὶ *ἁπλοῦν μέρος* τοῦ 35. Ἐν γένει *ἁπλοῦν μέρος ἀριθμοῦ τινος λέγεται πᾶς ἀριθμός, ὅστις πολλάκις λαμβανόμενος δίδει τὸν πρῶτον.*

Ἄρτιοι ἢ ζυγοὶ ἀριθμοὶ λέγονται, ὅσοι διαιροῦνται διὰ 2 ἀκριβῶς, οἷον ὁ 8, 12, 14, 26. *Περιττοὶ* δέ, ὅσοι δὲν διαιροῦνται διὰ 2 ἀκριβῶς, οἷον οἱ 5, 7, 21.

Πρῶτος ἀριθμὸς λέγεται, ὅστις δὲν ἔχει ἄλλον διαιρέτην, ἐκτὸς τοῦ ἑαυτοῦ του καὶ τῆς μονάδος, οἷον ὁ 7, ὁ 23 κτλ.

Σύνθετος ἀριθμὸς λέγεται πᾶς, ὅστις ἐκτὸς τοῦ ἑαυτοῦ του καὶ τῆς μονάδος ἔχει καὶ ἄλλον τινὰ διαιρέτην, οἷον οἱ 9, 15, 21 κτλ.

Διαιρέται 2 καὶ 5.

96. *Ἀριθμός τις διαιρεῖται διὰ 2, ἐὰν τὸ τελευταῖον αὐτοῦ ψηφίον διαιρῆται διὰ 2. Τὸ αὐτὸ ἀληθεύει, καὶ ἂν διαιρέτης εἶναι ὁ 5.*

Παράδειγμα. Οἱ ἀριθμοὶ 24, 576, 1 768, τῶν ὁποίων τὸ τελευταῖον ψηφίον διαιρεῖται διὰ 2, εἶναι διαιρετοὶ διὰ 2. Οἱ ἀριθμοὶ 75, 1360, τῶν ὁποίων τὸ τελευταῖον ψηφίον διαιρεῖται διὰ 5, εἶναι διαιρετοὶ διὰ 5.
Ὅτι τοῦτο εἶναι ἀληθὲς ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς:

Ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς 576 ἔχει 57 δεκάδας καὶ 6 μονάδας. Ἂν θεωρήσωμεν τὸν ἀριθμὸν ἀναλελυμένον εἰς τὰς δεκάδας του ὡς ἑξῆς

$$10+10+10+\ldots\ldots\ldots+10+6,$$

θὰ ἔχωμεν 57 φορὰς τὸν 10 καὶ τὰς 6 μονάδας. Ἐὰν δὲ ἀρχίσωμεν τὴν διαίρεσιν διὰ 2 διὰ τῶν ἀφαιρέσεων καὶ ἀπὸ ἑκάστου 10 ἀφαιρῶμεν τὸν 2 πέντε φοράς, ἐπειδὴ $10=2+2+2+2+2$, πᾶσαι αἱ δεκάδες, ὁσαιδήποτε καὶ ἂν εἶναι, θὰ λείψωσι, θὰ μείνῃ δὲ μόνον ὁ 6, ἤτοι τὸ τελευταῖον ψηφίον τοῦ ἀριθμοῦ, τὸ ὁποῖον θὰ δώσῃ τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως. Ἂν ὁ 6 δώσῃ ὑπόλοιπον 0, τοῦτο θὰ εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως 576 :2.

97. Ὁμοίως γίνεται ἡ ἀπόδειξις καὶ διὰ 5 μὲ μόνην τὴν διαφοράν, ὅτι πρέπει ἀπὸ ἑκάστης δεκάδος νὰ ἀφαιρῶμεν τὸν 5 δύο φοράς.

Οἱ μονοψήφιοι ἀριθμοὶ οἱ διαιρούμενοι διὰ 2 εἶναι οἱ 0, 2, 4, 6 καὶ 8. Οἱ δὲ διὰ 5, οἱ 0 καὶ 5. Ἐπομένως δυνάμεθα νὰ λέγωμεν, ὅτι,

Ἀριθμός τις διαιρεῖται διὰ 2, ἂν τὸ τελευταῖον αὐτοῦ ψηφίον εἶναι 0, 2, 4, 6 καὶ 8.

Ἀριθμός τις διαιρεῖται διὰ 5, ὅταν τὸ τελευταῖον αὐτοῦ ψηφίον εἶναι 0 ἢ 5.

* Διαιρέται 4 καὶ 25.

98. *Ἀριθμός τις διαιρεῖται διὰ 4, ἐὰν τὰ δύο τελευταῖα τοῦ ἀριθμοῦ ψηφία ἀποτελῶσιν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 4. Τὸ αὐτὸ ἀληθεύει, καὶ ἂν διαιρέτης εἶναι ὁ 25.*

Παράδειγμα. Ὁ ἀριθμὸς 9516 εἶναι διαιρετὸς διὰ 4. Τοῦτο ἐννοοῦμεν ἀπὸ τὰ δύο τελευταῖα αὐτοῦ ψηφία, τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦσιν ἀριθμὸν 16, διαιρετὸν διὰ 4. Ἐπίσης διαιροῦνται διὰ 4 καὶ οἱ ἀριθμοὶ 724, 436. Ὁ ἀριθμὸς 8675 διαιρεῖται διὰ 25. Τοῦτο ἐννοοῦμεν ἀπὸ τὰ δύο τελευταῖα αὐτοῦ ψηφία, τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦσι τὸν ἀριθμὸν 75 διαιρετὸν διὰ 25.

Ἡ ἀλήθεια τούτων ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς·

Ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς 7516 ἔχει 75 ἑκατοντάδας καὶ 16 μονάδας. Ἂν θεωρήσωμεν τὸν ἀριθμὸν ἀναλελυμένον εἰς τὰς ἑκατοντάδας του οὕτως $100+100+.....+100+76$, θὰ ἔχωμεν 75 φορὰς τὸν 100 καὶ τὰς 16 μονάδας. Ἐὰν δὲ ἀρχίσωμεν τὴν διαίρεσιν διὰ τῶν ἀφαιρέσεων καὶ ἀπὸ ἑκάστου 100 ἀφαιρῶμεν τὸν 4 εἴκοσι πέντε φοράς, ὅσας δηλ. χωρεῖ ὁ 4 εἰς τὸν 100, ὅλαι αἱ ἑκατοντάδες, ὁσαιδήποτε καὶ ἂν εἶναι, θὰ λείψωσι, θὰ μείνωσι δὲ μόνον αἱ 16 μονάδες, ἀπὸ τὰς ὁποίας, ἂν ἐξακολουθήσωμεν τὴν διαίρεσιν, θὰ λάβωμεν ὑπόλοιπον 0· τοῦτο δὲ θὰ εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως καὶ βλέπομεν, ὅτι προέρχεται ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τῶν δύο τελευταίων ψηφίων.

99. Ὁμοίως γίνεται ἡ ἀπόδειξις, καὶ ὅταν διαιρέτης εἶναι ὁ 25, μὲ μόνην τὴν διαφοράν, ὅτι πρέπει ἀπὸ ἑκάστης ἑκατοντάδος νὰ ἀφαιρῶμεν τὸν 25 τέσσαρας μόνον φοράς, διότι $100=25+25+25+25$. Ἐπειδὴ δὲ οἱ μόνοι διψήφιοι ἀριθμοί, οὓς διαιρεῖ ὁ 25, εἶναι οἱ 00, 25, 50, 75, ἕπεται ὅτι:

Ἀριθμός τις διαιρεῖται διὰ τοῦ 25, ἂν τελειώνῃ εἰς 00 ἢ 25 ἢ 50 ἢ 75.

Διαιρέται 9 καὶ 3.

100. *Ἀριθμός τις διαιρεῖται διὰ τοῦ 9, ἂν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων αὐτοῦ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 9. Τὸ αὐτὸ ἀληθεύει, καὶ ἂν διαιρέτης εἶναι ὁ 3.*

Παράδειγμα. Ὁ ἀριθμὸς 5463 εἶναι διαιρετὸς διὰ 9. Τοῦτο ἐννοοῦμεν ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ψηφίων αὐτοῦ $5+4+6+3$, ἤτοι τοῦ 18, ὅστις διαιρεῖται διὰ τοῦ 9. Ὡσαύτως διαιρεῖται καὶ διὰ τοῦ 3.

Σημείωσις. Ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων δοθέντος ἀριθμοῦ εἶναι ἐπίσης μέγας ἀριθμός, ἀθροίζομεν καὶ τούτου τὰ ψηφία καὶ ἐπαναλαμβάνομεν τοῦτο, μέχρις ὅτι καταντήσωμεν εἰς μικρόν τινα ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον νὰ δυνάμεθα εὐκόλως νὰ ἐννοήσωμεν, ἐὰν διαιρῆται διὰ τοῦ 9.

Π. χ. Τοῦ 5876895875 τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων εἶναι 68 καὶ τούτου πάλιν 14. Ἐπειδὴ ὁ 14 δὲν διαιρεῖται διὰ τοῦ 9, οὔτε ὁ 68 διαιρεῖται οὔτε ὁ δοθείς.

Ἡ ἀλήθεια τῆς ἀνωτέρω προτάσεως ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς:

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ὑπόλοιπον ἀφαιροῦμεν τὸν διαιρέτην ἀπὸ τοῦ διαιρετέου, ὅσας φορὰς εἶναι δυνατόν. Ἐὰν ἀπὸ ἑκάστης δεκάδος ἀφαιρέσωμεν τὸν 9, τότε ὅλαι αἱ δεκάδες τρέπονται εἰς μονάδας, διότι $10-9=1$, καὶ θὰ ἔχωμεν 546 μονάδας καὶ 3 μονάδας. Ἐξακολουθοῦμεν καὶ ἐνταῦθα τὰς ἀφαιρέσεις κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, δηλ. ἀφαιροῦντες ἀπὸ ἑκάστης δεκάδος τὸν 9. Αἱ 54 δεκάδες θὰ γίνουν 54 μονάδες καὶ θὰ ἔχωμεν $54+6+3$. Ἐὰν καὶ ἐνταῦθα ἀπὸ τὰς 5 δεκάδας ἀφαιρέσωμεν τὸν 9 πέντε φοράς, θὰ ἔχωμεν $5+4+6+3$. Τὸ ἄθροισμα τοῦτο, τὸ ὁποῖον οὐδὲν ἄλλο εἶναι ἢ μερικός τις διαιρετέος, θὰ δώσῃ τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως, ἐὰν ἐξακολουθήσωμεν τὴν διαίρεσιν διὰ τῶν ἀφαιρέσεων. Καὶ ἐὰν δώσῃ ὑπόλοιπον 0, ἕπεται ὅτι ὁ ἀριθμὸς 5463 διαιρεῖται διὰ τοῦ 9.

Τὰ αὐτὰ ἀκριβῶς ἀληθεύουσι καὶ ὁμοίως ἀποδεικνύονται καὶ διὰ τὸν 3, ἀρκεῖ ἀπὸ ἑκάστην δεκάδα νὰ ἀφαιρῶμεν τρεῖς φορὰς τὸν 3, ὁπότε ἡ δεκὰς τρέπεται εἰς μονάδα.

* Διαιρέτης 11.

101. *Ἀριθμός τις διαιρεῖται διὰ τοῦ 11, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν διψηφίων τμημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα δυνάμεθα νὰ χωρίσωμεν αὐτὸν ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν, διαιρεῖται διὰ τοῦ 11.*

Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι τοῦτο εἶναι ἀληθές, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς:

Ἐὰν ἀπὸ 100 ἀφαιρέσωμεν 9 φορὰς τὸν 11, ἤτοι 99, ἡ ἑκατοντὰς τρέπεται εἰς μονάδα, διότι $100-99=1$.

Ἔστω ἤδη ὁ ἀριθμὸς 35761, ὅστις περιέχει 357 ἑκατοντάδας καὶ 61 μονάδας. Ἂν ἀναλύσωμεν τὸν ἀριθμὸν τοῦτον εἰς τὰς ἑκατοντάδας, του οὕτω πως $100+100+100+\ldots\ldots+10+61$, θὰ ἔχωμεν 357 φορὰς τὸν 100 καὶ 61 μονάδας· Ἐὰν ἤδη ἀρχίσωμεν τὴν ἐκτέλεσιν τῆς διαιρέσεως διὰ τῶν ἀλλεπαλλήλων ἀφαιρέσεων, φροντίζοντες ὅμως νὰ ἀφαιρῶμεν μόνον ἀπὸ ἑκάστης ἑκατοντάδος τὸν 11 ἐννέα φοράς, αἱ 357 ἑκατοντάδες θὰ γίνουν πᾶσαι μονάδες καὶ θὰ ἔχωμεν $357+61$. Ἐὰν δὲ ἐξακολουθήσωμεν τὴν ἐκτέλεσιν τῆς διαιρέσεως διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου καὶ ἀπὸ τὰς 3 ἑκατοντάδας τοῦ ἀριθμοῦ τούτου ἀφαιρέσωμεν τὸν 11 ἐννέα φοράς, αἱ 3 ἑκατοντάδες θὰ γίνουν μονάδες καὶ θὰ ἔχωμεν $3+57+61$. Το ἄθροισμα τοῦτο διὰ τῆς ἐξακολουθήσεως τῆς διαιρέσεως θὰ δώσῃ τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως, ἤτοι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ 35761 διὰ τοῦ 11. Ἐὰν τὸ ἄθροισμα $3+57+61$ δώσῃ ὑπόλοιπον 0, τότε ἡ διαίρεσις $35761:11$ ἐκτελεῖται ἀκριβῶς.

Παρατήρησις 1η. Ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν διψηφίων τμημάτων εἶναι μεγαλείτερον τοῦ 100, πάλιν χωρίζομεν εἰς διψήφια τμήματα καὶ προσθέτομεν, μέχρις ὅτου εὕρωμεν ἀριθμὸν διψήφιον.

Παρατήρησις 2α. Διψήφιοι ἀριθμοὶ διαιρετοὶ διὰ τοῦ 11 εἶναι ὅσοι ἔχουν καὶ τὰ δύο ψηφία ἴσα, οἷον οἱ 22, 33, 44 κτλ.

* Διαιρέτης 7.

102. *Ἀριθμός τις μικρότερος τοῦ 1000 διαιρεῖται διὰ τοῦ 7, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων μετὰ τοῦ τριπλασίου τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων καὶ τοῦ διπλασίου τοῦ τῶν ἑκατοντάδων, ἂν ὑπάρχωσι τοιαῦται, διαιρεῖται διὰ τοῦ 7.*

Παρατήρησις. Ἂν ψηφίον τι εἶναι 7, δυνάμεθα νὰ μὴ τὸ λαμβάνωμεν ὑπ' ὄψιν, ἂν δὲ μεγαλείτερον τοῦ 7, νὰ ἐλαττῶμεν κατὰ 7, πρὶν πολλαπλασιάσωμεν.

Παράδειγμα. Ὁ ἀριθμὸς 98 διαιρεῖται διὰ τοῦ 7. Τοῦτο ἐννοοῦμεν ἐκ τοῦ ἀθροίσματος $9\times3+8=35$ ἢ κάλλιον (παρατήρησις) ἐκ τοῦ $2\times3+1=7$, τὸ ὁποῖον διαιρεῖται διὰ τοῦ 7. Ὁμοίως ὁ ἀριθμὸς 847 διαιρεῖται διὰ τοῦ 7. Τοῦτο ἐννοοῦμεν ἐκ τοῦ ἀθροίσματος $8\times2+4\times3+7$ ἢ μᾶλλον (παρατήρησις) ἐκ τοῦ $1\times2+4\times3=14$, τὸ ὁποῖον διαιρεῖται δι' 7.

Ἡ ἀπόδειξις τῆς προτάσεως ταύτης στηρίζεται ἐπὶ τῆς ἀναλύσεως ἑκάστου ἀριθμοῦ χωριστὰ εἰς τὰς μονάδας, εἰς τὰς δεκάδας καὶ εἰς τὰς ἑκατοντάδας αὐτοῦ καὶ ἐπὶ τῆς ἐκτελέσεως τῆς πράξεως δι' ἀφαιρέσεων.

* Διαιρέτης 8.

103. *Ἀριθμός τις μικρότερος τοῦ 1000 διαιρεῖται διὰ τοῦ 8, ἂν τὸ ἄθροισμα τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων καὶ τὸ διπλάσιον τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων καὶ τὸ τετραπλάσιον τοῦ ψηφίου τῶν ἑκατοντάδων, (ἂν ὑπάρχωσι), διαιρεῖται διὰ τοῦ 8.*

Παρατήρησις. Ἂν ψηφίον τι εἶναι 8, παραλείπεται, ἂν δὲ μεγαλείτερον τοῦ 8, δυνάμεθα πρὶν πολλαπλασιάσωμεν, νὰ ἐλαττώσωμεν, αὐτὸ κατὰ 8.

Παράδειγμα. Ὁ ἀριθμὸς 656 διαιρεῖται διὰ τοῦ 8. Τοῦτο ἐννοοῦμεν ἐκ τοῦ ἀθροίσματος $6\times4+5\times2+6=40$, τὸ ὁποῖον διαιρεῖται διὰ τοῦ 8. Ὡσαύτως ὁ 984 διαιρεῖται διὰ τοῦ 8, διότι καὶ τὸ ἄθροισμα $9\times4+8\times2+4$ ἢ κάλλιον τὸ $1\times4+4=8$ διαιρεῖται διὰ τοῦ 8.

Ἡ ἀπόδειξις τῆς προτάσεως ταύτης στηρίζεται ἐπὶ τῆς ἀναλύσεως τοῦ ἀριθμοῦ εἰς τὰς μονάδας του, εἰς τὰς δεκάδας του καὶ εἰς τὰς ἑκατοντάδας αὐτοῦ (ἂν ὑπάρχωσι) καὶ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς διαιρέσεως διὰ τῶν ἀλλεπαλλήλων ἀφαιρέσεων τοῦ 8 χωριστὰ ἀπὸ ἑκάστης ἑκατοντάδος καὶ χωριστὰ ἀπὸ ἑκάστης δεκάδος.

Ἂν ὁ ἀριθμὸς εἶναι μεγαλείτερος τοῦ 1 000, διὰ νὰ διαιρῆται διὰ τοῦ 8, πρέπει ὁ ὑπὸ τῶν τριῶν πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφίων ἀποτελούμενος ἀριθμὸς νὰ διαιρῆται διὰ τοῦ 8.

Παράδειγμα. Ὁ ἀριθμὸς 27 664 διαιρεῖται διὰ τοῦ 8. Τοῦτο ἐννοοῦμεν ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ 664, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦσι τὰ τρία πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ ψηφία, ὅστις διαιρεῖται διὰ τοῦ 8. Ὁ ἀριθμὸς 46984 διαιρεῖται διὰ τοῦ 8, καθ' ὅσον καὶ ὁ 984, ὡς εἴδομεν, διαιρεῖται διὰ τοῦ 8.

Ἡ ἀπόδειξις τῆς προτάσεως ταύτης στηρίζεται ἐπὶ τοῦ ὅτι ὁ 1000 περιέχει 125 φορὰς τὸν 8, καὶ ἂν ἀπὸ ἑκάστης χιλιάδος ἀφαιρέσωμεν 125 φορὰς τὸν 8, αἱ χιλιάδες μηδενίζονται πᾶσαι καὶ μένει ὁ 984, ὅστις θὰ δώσῃ τὸ ὑπόλοιπον, καὶ ἐπειδὴ οὗτος δίδει 0, τοῦτο εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω λοιπὸν συνάγομεν, ὅτι

Πᾶς ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ τοῦ 8, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν μονάδων του μετὰ τοῦ διπλασίου τῶν δεκάδων καὶ τοῦ τετραπλασίου τῶν ἑκατοντάδων διαιρῆται δι' 8.

Σημ. Ἂν ψηφίον τι εἶναι 8, παραλείπεται, ἂν δὲ μεγαλείτερον, ἐλαττοῦται κατὰ 8, πρὶν πολλαπλασιασθῇ.

* Διαιρέται 6, 12, 15, 18.

104. *Ἀριθμός τις διαιρεῖται διὰ τοῦ 6, ἐὰν διαιρῆται διὰ τοῦ 2 καὶ διὰ τοῦ 3.*

Ἀριθμός τις διαιρεῖται διὰ τοῦ 12, ἐὰν διαιρῆται διὰ τοῦ 3 καὶ διὰ τοῦ 4.

Ἀριθμός τις διαιρεῖται διὰ τοῦ 15, ἐὰν διαιρῆται διὰ τοῦ 3 καὶ διὰ τοῦ 5.

Ἡ ἀλήθεια ἑκάστης τῶν προτάσεων τούτων ἀποδεικνύεται εἰς τὴν Θεωρητικὴν Ἀριθμητικήν.

* Περὶ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου.

Ὁρισμοί.

106. Κοινὸς διαιρέτης πολλῶν ἀριθμῶν λέγεται ἐκεῖνος, ὅστις διαιρεῖ αὐτοὺς ἀκριβῶς· οἷον τῶν 16, 24, 40 καὶ 56 κοινὸς διαιρέτης εἶναι ὁ 4. Οἱ δοθέντες ὅμως ἀριθμοὶ ἔχουν κοινοὺς διαιρέτας καὶ τὸν 8 καὶ τὸν 2, ὥστε τρεῖς κοινοὺς διαιρέτας ἔχουσιν οἱ δοθέντες ἀριθμοί, τὸν 8 τὸν 4 καὶ τὸν 2.

Μέγιστος κοινὸς διαιρέτης δοθέντων ἀριθμῶν λέγεται ὁ μεγαλείτερος τῶν κοινῶν διαιρετῶν· εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα τοιοῦτος εἶναι ὁ 8.

Πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους λέγονται οἱ δοθέντες ἀριθμοί, ὅταν οὐδένα κοινὸν διαιρέτην ἔχουν, πλὴν τῆς μονάδος. Τοιοῦτοι εἶναι ὁ 7, 9, 11, 14.

* Εὕρεσις τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου δύο ἀριθμῶν.

107. Κανών. *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην δύο ἀριθμῶν, διαιροῦμεν τὸν μεγαλείτερον διὰ τοῦ μικροτέρου, ἔπειτα τὸν μικρότερον διὰ τοῦ ὑπολοίπου (ἂν ὑπάρχῃ), καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις ὅτου εὕρωμεν ὑπόλοιπον 0. Ὁ διαιρέτης τῆς τελευταίας διαιρέσεως εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.*

Σημ. Ἂν διαίρεσίς τις δώσῃ ὑπόλοιπον 1, τότε οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ ἔχουσι μόνον κοινὸν διαιρέτην τὴν μονάδα, εἶναι ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Παραδείγματα.

1) Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 175 καὶ 25.

Διάταξις τῆς πράξεως

		7 πηλίκον
διαιρετέος	175	25 διαιρέτης
ὑπόλοιπον	0	

Ἡ πρώτη διαίρεσις ἔδωκεν ὑπόλοιπον 0· ἄρα ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δοθέντων ἀριθμῶν εἶναι ὁ 25.

Σημ. Το πηλίκον εἰς ἑκάστην διαίρεσιν πρὸς διάταξιν τῆς πράξεως γράφομεν ὑπεράνω τοῦ διαιρέτου.

2) Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 3756 καὶ 624

Διάταξις τῆς πράξεως

		6	52 πηλίκα
διαιρετέοι	3756	624	12 διαιρέται
ὑπόλοιπα	012	24	
		0	

ἡ δευτέρα διαίρεσις 624 : 12 ἔδωκεν ὑπόλοιπον 0. Μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 3676 καὶ 624 εἶναι ὁ 12.

3) Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 4375 καὶ 540

Ἐκτέλεσις καὶ διάταξις		8	9	1	3 πηλίκα
διαιρετέοι	4375	: 540	: 55	: 45	15 διαιρέται
	55	45	15	0	ὑπόλοιπα

Ἐνταῦθα ἡ τετάρτη διαίρεσις 45 : 15 ἔδωκεν ὑπόλοιπον 0. Ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 4375 καὶ 540 εἶναι ὁ 15.

* Εὕρεσις τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου πολλῶν ἀριθμῶν.

108. Κανών. *Πρὸς εὕρεσιν τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου πολλῶν ἀριθμῶν διαιροῦμεν ὅλους τοὺς ἄλλους διὰ τοῦ μικροτέρου τούτων, ἔπειτα τὰ εὑρεθέντα ὑπόλοιπα καὶ τὸν πρῶτον διαιρέτην διὰ τοῦ μικροτέρου ὑπολοίπου, τὸν δεύτερον διαιρέτην καὶ τὰ νέα ὑπόλοιπα διὰ τοῦ μικροτέρου ὑπολοίπου καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις ὅτου τὰ ὑπόλοιπα εὑρεθῶσιν ἴσα τῷ 0. Ὁ τελευταῖος διαιρέτης εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.*

Παράδειγμα. Νὰ εὑρεθῇ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 105, 84, 56, 42, 28.

						Διαιρέται
Ἀριθμοί	105,	84,	56,	42,	28.	28
(ὑπόλοιπα καὶ ὁ διαιρέτης 28)	21,	0,	0,	14,	28.	14
(» » » 14)	7,	0,	0,	14,	0.	7
(» » » 7)	7,	0,	0,	0,	0.	

Ὁ ζητούμενος μέγιστος κοινὸς διαιρέτης εἶναι ὁ 7.

* Περὶ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου.

Ὁρισμοί.

109. **Κοινὸν πολλαπλάσιον** δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν λέγεται ὁ ἀριθμός, ὅστις εἶναι πολλαπλάσιον ἑκάστου τῶν δοθέντων, ἢ ὁ ἀριθμός, ὅστις διαιρεῖται δι' ὅλων τῶν δοθέντων ἀκριβῶς· οἷον ὁ 54 εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν 2, 3, 6, 9. Οἱ ἀριθμοὶ ὅμως 2, 3, 6, 9, ἐκτὸς τοῦ 54,

ἔχουν κοινὸν πολλαπλάσιον καὶ τὸν 36 καὶ τὸν 18 καὶ τὸν 144 καὶ πλείστους ἄλλους. Τὸ μικρότερον τῶν κοινῶν πολλαπλασίων τῶν δοθέντων ἀριθμῶν λέγεται *ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον*. Εἰς τὸ δοθὲν παράδειγμα ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον εἶναι ὁ 18. ἄλλος μικρότερος αὐτοῦ δὲν διαιρεῖται δι' ὅλων τῶν δοθέντων ἀκριβῶς.

* Εὕρεσις τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου.

110. Τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον δύο δοθέντων ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων ὁ μεγαλείτερος διαιρεῖται διὰ τῶν μικροτέρων, εἶναι αὐτὸς ὁ μεγαλείτερος· ἂν ὅμως οὗτος δὲν διαιρῆται, διπλασιάζομεν αὐτόν, τριπλασιάζομεν καὶ ἐξακολουθοῦμεν οὕτω, μέχρις ὅτου εὕρωμεν τὸ πρῶτον πολλαπλάσιον αὐτοῦ τὸ διαιρετὸν ὑπὸ πάντων τῶν δοθέντων. Τοῦτο εἶναι τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον αὐτῶν.

Παράδειγμα. Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 2, 3, 6· ὁ μεγαλείτερος 6, ὅστις διαιρεῖται δι' ὅλων τῶν ἄλλων, εἶναι τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν 2, 3, 6. Τῶν ἀριθμῶν 2, 5, 4 εἶναι ὁ 20, ὅστις εἶναι τὸ πρῶτον πολλαπλάσιον τοῦ 5, τὸ ὁποῖον διαιρεῖται ὑπὸ πάντων τῶν δοθέντων. Καὶ τῶν ἀριθμῶν 12, 15, 20 ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι ὁ 60.

111. Ἐπειδὴ πολλάκις ὁ τρόπος οὗτος δὲν εἶναι σύντομος, πράττομεν ὡς ἑξῆς:

Παράδειγμα 1ον

Ἀριθμοὶ	Διαιρέται
4, 5, 6, 9	2
2, 5, 3, 9	3
2, 5, 1, 3	

Παράδειγμα 2ον

Ἀριθμοὶ	Διαιρέται
6, 14, 36, 5	2
3, 7, 18, 5	3
1, 7, 6, 5	

Τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον εἶναι

$$2 \times 3 \times 5 \times 6 \times 7 = 1260.$$

Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 4, 5, 6, 9. Γράφομεν πρῶτον αὐτοὺς κατὰ σειράν. Εὑρίσκομεν δύο ἐξ αὐτῶν ἔχοντας κοινόν τινα διαιρέτην πρῶτον ἀριθμὸν καὶ διαιροῦμεν τούτους, τὸ δὲ πηλίκον ἑκάστου γράφομεν κάτωθι αὐτοῦ, εἰς τὴν αὐτὴν δὲ σειρὰν γράφομεν καὶ τοὺς μὴ διαιρεθέντας ἀριθμούς. Εἰς τὸ δοθὲν παράδειγμα ὁ 4 καὶ 6 διαιροῦνται διὰ 2 Εἰς τὴν δευτέραν σειρὰν ἐγράφησαν τὰ πηλίκα αὐτῶν διὰ 2 καὶ οἱ 5 καὶ 9 τῆς πρώτης σειρᾶς. Μετὰ ταῦτα πράττομεν ὁμοίως καὶ εἰς τὴν δευτέραν σειράν, εἰς τὴν ὁποίαν παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ 3 καὶ ὁ 9 διαιροῦνται διὰ 3. Τὰ πηλίκα αὐτῶν γράφομεν ὑπ' αὐτοὺς εἰς

Παράδειγμα 3ον

'Αριθμοὶ	Διαιρέται
12, 15, 20	2
6, 15, 10	2
3, 15, 5	3
1, 5, 5	5
1, 1, 1	

Τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον εἶναι

$2\times2\times3\times5=60$.

τὴν τρίτην σειρὰν μετὰ τῶν μὴ διαιρεθέντων ἀριθμῶν 2 καὶ 5. Ἂν εἰς τὴν τρίτην σειρὰν ὑπάρχωσιν ἀριθμοὶ ἔχοντες κοινὸν διαιρέτην, ἐξακολουθοῦμεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, μέχρις ὅτου εὕρωμεν σειρὰν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι νὰ μὴ ἔχωσιν οὔτε ἀνὰ δύο κοινὸν διαιρέτην. Τότε σχηματίζομεν τὸ γινόμενον πάντων τῶν διαιρετῶν καὶ τῶν ἀριθμῶν τῆς τελευταίας σειρᾶς καὶ ἐκεῖνο εἶναι τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον.

Εἰς τὸ 1ον. παράδειγμα τοῦτο εἶναι $2\times3\times2\times5\times3=180$.

Σημ. 1η Πρῶτοι ἀριθμοὶ ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 100 εἶναι οἱ 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Σημ. 2α Ἂν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ δὲν ἔχωσιν ἀνὰ δύο κοινὸν διαιρέτην, δηλαδὴ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, τότε ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον εἶναι τὸ γινόμενον αὐτῶν. Π. χ. τῶν ἀριθμῶν 3, 5, 7, 4, οἱ ὁποῖοι ἀνὰ δύο εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον εἶναι τὸ γινόμενον αὐτῶν $3\times5\times7\times4=420$.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

112. Ἂν τὴν ἀκεραίαν μονάδα, οἷον ἓν μῆλον, χωρίσωμεν εἰς δύο ἴσα μέρη, ἕκαστον τῶν μερῶν τούτων λέγεται ἥμισυ ἢ ἓν δεύτερον καὶ γράφεται $\frac{1}{2}$, ἂν δὲ εἰς τρία, λέγεται ἓν τρίτον καὶ γράφεται $\frac{1}{3}$, ἂν εἰς τέσσαρα, λέγεται ἓν τέταρτον $\frac{1}{4}$. Οὕτω προχωροῦντες σχηματίζομεν νέους ἀριθμοὺς ὡς ἑξῆς· ἓν πέμπτον $\frac{1}{5}$, ἓν ἕκτον $\frac{1}{6}$ κτλ., ἓν δέκατον $\frac{1}{10}$, ἓν ἑκατοστὸν $\frac{1}{100}$ κτλ.

Ἂν τὸ $\frac{1}{2}$ λάβωμεν δύο φοράς, εἶναι φανερὸν ὅτι θὰ ἔχωμεν ὁλόκληρον τὴν μονάδα, ἤτοι $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$. ὁμοίως $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$, ἐπίσης $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$ καὶ καθεξῆς.

113. Οἱ ἀριθμοὶ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{5}$, . . . , οἵτινες παριστῶσιν ἓν ἐκ τῶν ἴσων μερῶν, εἰς τὰ ὁποῖα ἐχωρίσθη ἡ ἀκεραία μονὰς 1, λέγονται *κλασματικαὶ μονάδες*.

114. *Κλασματικὸς ἀριθμὸς* ἢ *κλάσμα* λέγεται *ὡρισμένον πλῆθος κλασματικῶν μονάδων*· π. χ. $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$ ἢ *καὶ μία κλασματικὴ μονάς*.

Ὥστε οἱ μὲν ἀκέραιοι ἀριθμοὶ εἶναι ὡρισμένα πλήθη ἀκεραίων μονάδων ἢ καὶ μία μονάς, οἱ δὲ κλασματικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι ὡρισμένα πλήθη κλασματικῶν μονάδων ἢ καὶ μία κλασματικὴ μονάς.

115. *Μικτὸς ἀριθμὸς* λέγεται *ὁ ἀριθμός, ὅστις ἀποτελεῖται ἀπὸ ἀκέραιον καὶ κλάσμα.*

Γραφὴ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν.

116. Κλασματικὸς ἀριθμός, ὅστις παράγεται ἐκ μιᾶς κλασματικῆς μονάδος διὰ τῆς ἐπαναλήψεως, γράφεται, ἐὰν γράψωμεν πρῶτον τὸν ἀριθμὸν τὸν δεικνύοντα ποσάκις ἐπανελήφθη ἡ κλασματικὴ μονάς, κάτωθι τούτου εὐθεῖαν καὶ κάτωθι ταύτης τὸν ἀριθμόν, ὅστις δεικνύει ποία εἶναι ἡ ἐπαναλαμβανομένη μονάς. Καὶ ὁ μὲν πρῶτος λέγεται *ἀριθμητής*, ὁ δὲ ὑπὸ τὴν εὐθεῖαν *παρονομαστής*· καὶ οἱ δύο ὁμοῦ *ὅροι* τοῦ κλάσματος. Ἀναγινώσκονται δὲ ὁ μὲν ἀριθμητὴς ὡς ἀπόλυτος ἀριθμός, ὁ δὲ παρονομαστὴς ὡς τακτικός.

Παραδείγματα. Τὸ κλάσμα, τὸ ὁποῖον παράγεται ἐκ τῆς μονάδος $\frac{1}{4}$ τρὶς ληφθείσης, ἤτοι $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$, γράφεται συντόμως $\frac{3}{4}$ καὶ ἀναγινώσκεται *τρία τέταρτα*. Τὸ δὲ παραγόμενον ἐκ τοῦ $\frac{1}{7}$ τετράκις ληφθέντος, ἤτοι $\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}$, γράφεται $\frac{4}{7}$ καὶ ἀναγινώσκεται *τέσσαρα ἕβδομα*. Τὸ δὲ $\frac{1}{3}$ πεντάκις ληφθὲν γράφεται $\frac{5}{3}$ κτλ.

117. Εἰς τοὺς μικτοὺς ἀριθμοὺς γράφεται ὁ ἀκέραιος καὶ πλησίον τούτου τὸ κλάσμα. Π. χ. ὁ μικτὸς ὁ ἔχων 5 ἀκεραίας μονάδας καὶ $\frac{2}{3}$ γράφεται $5+\frac{2}{3}$ ἢ καὶ $5\frac{2}{3}$.

Ὁρισμοί.

118. *Ὁμώνυμα κλάσματα* λέγονται, ὅσα ἔχουσι τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, οἷον τὰ $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{6}{4}$.

Τοιαῦτα εἶναι πάντα τὰ παραγόμενα ἐκ τῆς ἰδίας κλασματικῆς μονάδος

Ἑτερώνυμα κλάσματα λέγονται, ὅσα ἔχουσι διαφόρους παρονομαστάς, ὡς τὰ $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{9}{9}$.

Τοιαῦτα εἶναι τὰ παραγόμενα ἐκ διαφόρων κλασματικῶν μονάδων.

Σύγκρισις κλασμάτων πρὸς ἀκεραίαν μονάδα.

119. *Πᾶν κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει τοὺς δύο ὅρους αὐτοῦ ἴσους, εἶναι ἴσον πρὸς τὴν ἀκεραίαν μονάδα.*

Τὰ κλάσματα $\frac{2}{2}$. $\frac{3}{3}$. $\frac{4}{4}$ εἶναι ἴσα πρὸς τὴν ἀκεραίαν μονάδα 1, διότι $\frac{2}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ ὁμοίως $\frac{3}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$ ὡσαύτως $\frac{4}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$· εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι, ἂν τὴν ἀκεραίαν μονάδα χωρίσωμεν εἰς ὁσαδήποτε ἴσα μέρη καὶ ὕστερον ἑνώσωμεν ὅλα τὰ μέρη ταῦτα, θὰ ἔχωμεν πάλιν τὴν ἀκεραίαν μονάδα 1.

120. *Πᾶν κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ ἀριθμητὴς εἶναι μικρότερος τοῦ παρανομαστοῦ, εἶναι μικρότερον τῆς ἀκεραίας μονάδος.*

Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$· τοῦτο γράφεται $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$, βλέπομεν δὲ ὅτι, διὰ νὰ γίνῃ τοῦτο ἴσον πρὸς τὴν ἀκεραίαν μονάδα, πρέπει νὰ προστεθῇ ἀκόμη $\frac{1}{4}$, ἄρα εἶναι μικρότερον τῆς ἀκεραίας μονάδος· ὁμοίως τὸ $\frac{2}{3}$ ἤτοι $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$ χρειάζεται ἀκόμη $\frac{1}{3}$ διὰ νὰ γίνῃ ἀκεραία μονάς· ἄρα εἶναι μικρότερον ταύτης.

121. *Πᾶν κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ ἀριθμητὴς εἶναι μεγαλείτερος τοῦ παρονομαστοῦ, εἶναι μεγαλείτερον τῆς ἀκεραίας μονάδος.*

Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{5}{3}$, ὅπερ εἶναι $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$. Ἐὰν ἐκ τῶν πέντε τούτων μερῶν ἑνώσωμεν τρία μόνον, θὰ ἔχωμεν 1, θὰ μείνωσι δὲ καὶ δύο τρίτα περιπλέον· ἑπομένως τὸ ὅλον εἶναι μεγαλείτερον τῆς ἀκεραίας μονάδος 1.

Ἰδιότητες τῶν κλασμάτων.

122. *Πᾶν κλάσμα εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ.*

Τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$ εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 3 : 4· διότι, ἂν ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν 3 διὰ τοῦ 4, ἤτοι νὰ μερίσωμεν τρία μῆλα εἰς τέσσαρας ἀνθρώπους, λαμβάνομεν ἓν μῆλον τὸ χωρίζομεν εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη καὶ δίδομεν εἰς ἕκαστον ἓν μέρος, ἤτοι $\frac{1}{4}$ τοῦ μήλου· ἔπειτα λαμβάνομεν ἄλλο ἓν μῆλον καὶ τὸ μερίζομεν ὁμοίως· ὥστε ἕκαστος θὰ λάβῃ ἀπὸ ἄλλο $\frac{1}{4}$ τοῦ μήλου· ὁμοίως μερίζομεν καὶ τὸ τρίτον μῆλον καὶ δίδομεν εἰς ἕκαστον ἀκόμη $\frac{1}{4}$, ἤτοι τὸ ὅλον $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$· ὥστε τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$ προκύπτει, ἐὰν μερίσωμεν τρία πράγματα εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη, ἤτοι ἂν διαιρέσωμεν 3 : 4.

Δοκιμή. Ἂν πράγματι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $3:4$ εἶναι $\frac{3}{4}$, πρέπει πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην 4 νὰ δίδῃ τὸν διαιρετέον 3, ἤτοι νὰ εἶναι $\frac{3}{4}\times4=3$. Τῷ ὄντι, ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμόν, θὰ ἔχωμεν $\frac{3}{4}\times4=\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}$, καὶ ἂν ἀναλύσωμεν ἕκαστον κλάσμα εἰς τὰς μονάδας, ἐκ τῶν ὁποίων ἀποτελεῖται, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{3}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$$
$$\frac{3}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$$
$$\frac{3}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$$
$$\frac{3}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$$

Προσθέτοντες κατὰ στήλας τὰς μονάδας ταύτας, εὑρίσκομεν ἐξ ἑκάστης στήλης $\frac{4}{4}$, ἤτοι 1, ἑπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν στηλῶν εἶναι ὁ 3, ὅθεν ἕπεται ὅτι $\frac{3}{4}\times4=3$.

123. Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης συμπεραίνομεν ὅτι,

Πᾶν κλάσμα πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν παρονομαστήν του δίδει γινόμενον τὸν ἀριθμητήν του.

124. Συμπεράσματα. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω βλέπομεν, ὅτι *πᾶσα διαίρεσις, ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι διάφορος τοῦ 0, εἶναι δυνατὴ καὶ ὅτι τὸ πηλίκον παρίσταται διὰ κλάσματος ἔχοντος ἀριθμητὴν τὸν διαιρετέον καὶ παρονομαστὴν τὸν διαιρέτην.*

Ἐπειδὴ δὲ $\frac{5}{1}=5:1=5$, ἕπεται, ὅτι

Πᾶν κλάσμα ἔχον παρονομαστὴν τὴν μονάδα εἶναι ἴσον μὲ τὸν ἀριθμητήν του. Ἢ ὅτι,

Πᾶς ἀκέραιος ἀριθμὸς δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς κλάσμα ἔχον παρονομαστὴν τὴν μονάδα, οἷον $5=\frac{5}{1}$, $2=\frac{2}{1}$.

125. *Παντὸς κλάσματος ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν ἢ διαιρεθῶσιν ἀριθμητὴς καὶ παρονομαστὴς διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, προκύπτει κλάσμα ἴσον.*

Ἔστω ὡς παράδειγμα τὸ κλάσμα $\frac{2}{3}$ Τοῦτο σημαίνει, ὅτι δύο ἀκεραίας μονάδας, ἤτοι δύο μῆλα, τὰ ἐμοιράσθησαν τρεῖς ἄνθρωποι καὶ ἕκαστος ἔλαβε $\frac{2}{3}$ τοῦ μήλου. Ἀλλ' εἶναι φανερὸν ὅτι, ἂν προστεθῶσιν εἰς τούτους ἄλλοι τρεῖς ἄνθρωποι καὶ γίνωσι τὸ ὅλον ἓξ ἄνθρωποι, πρέπει νὰ ἔχωσιν ἄλλα δύο μῆλα, *διὰ νὰ μὴ μεταβληθῶσι τὰ μερίδια τῶν πρώτων*, ἤτοι οἱ 6 ἄνθρωποι πρέπει νὰ μοιράσωσι 4 μῆλα, ἀλλὰ τὸ μερίδιον τότε θὰ παρίσταται διὰ τοῦ $\frac{4}{6}$.

Ἐὰν πάλιν εἰς τούτους προστεθῶσι καὶ ἄλλοι τρεῖς ἄνθρωποι, πρέπει, *διὰ νὰ μὴ μεταβληθῶσι τὰ μερίδια τῶν προηγουμένων*, νὰ ἔχωσιν ἀκόμη δύο μῆλα, ἤτοι οἱ 9 ἄνθρωποι πρέπει νὰ μοιράσουν 6 μῆλα. Ὁμοίως σκεπτόμενοι βλέπομεν, ὅτι οἱ 12 ἄνθρωποι πρέπει νὰ ἔχουν 8 μῆλα, διὰ νὰ μείνουν ἀμετάβλητα τὰ μερίδια, ἕκαστον τῶν ὁποίων τώρα θὰ γράφηται $\frac{8}{12}$ καὶ καθ' ἑξῆς.

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι τὰ κλάσματα $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{8}{12}$ παριστῶσι τὸ αὐτὸ μερίδιον, εἶναι λοιπὸν ἴσα. Τὰ κλάσματα δὲ ταῦτα προκύπτουσιν ἐκ τοῦ $\frac{2}{3}$ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῶν δύο ὅρων αὐτοῦ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Ἀντιστρόφως, τὸ $\frac{2}{3}$ τὸ ἴσον πρὸς τὸ $\frac{8}{12}$ προκύπτει ἐκ τούτου, ἐὰν διαιρεθῶσιν ἀμφότεροι οἱ ὅροι του διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ. Ὁμοίως προκύπτει καὶ τὸ $\frac{4}{6}$ ἐκ τοῦ $\frac{8}{12}$.

Προσθήκη. Ἀπεδείξαμεν ὅτι $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{6}{9}$. Ἀλλὰ τὰ κλάσματα ταῦτα εἶναι πηλίκα τῶν διαιρέσεων

$$2 : 3, \quad 4 : 6, \quad 6 : 9.$$

Ἐκ τούτου συνάγομεν ὅτι:

Εἰς πᾶσαν διαίρεσιν *ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἢ διαιρέσωμεν διαιρετέον καὶ διαιρέτην διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἡ ἀξία τοῦ πηλίκου δὲν μεταβάλλεται.*

Σημ. Τὴν πρότασιν ταύτην ἀπεδείξαμεν καὶ ἐν § 92.

Ὁρισμός. Τὰς τοιαύτας διαιρέσεις λέγομεν *ἰσοδυνάμους*.

126. *Ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς κλάσματός τινος πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 2, 3, 4 κτλ. τὸ κλάσμα γίνεται δίς, τρίς, τετράκις μεγαλείτερον, ἐὰν δὲ ὁ ἀριθμητὴς διαιρεθῇ, τὸ κλάσμα γίνεται δίς, τρὶς μικρότερον.*

Γνωρίζομεν ὅτι, ἂν 6 ἄνθρωποι μοιράσουν 5 ἀκεραίας μονάδας, οἷον ἄρτους, τὸ μερίδιον ἑκάστου εἶναι $\frac{5}{6}$· ἐὰν οἱ αὐτοὶ ἄνθρωποι ἐμοίραζον 10 ἄρτους, τὸ μερίδιον ἑκάστου, ὅπερ εἶναι $\frac{10}{6}$, εἶναι φανερόν, ὅτι θὰ εἶναι διπλάσιον· καὶ ἂν οἱ αὐτοὶ ἄνθρωποι ἐμοίραζον 15 ἄρτους, τὸ μερίδιον ἑκάστου, ὅπερ εἶναι $\frac{15}{6}$, θὰ ἦτο τριπλάσιον. Ὥστε, ἂν ὁ ἀριθμητὴς τοῦ $\frac{5}{6}$ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 2, προκύπτει κλάσμα διπλάσιον, τὸ $\frac{10}{6}$, καὶ ἂν ὁ ἀριθμητὴς πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 3, προκύπτει κλάσμα τριπλάσιον, τὸ $\frac{15}{6}$ κτλ.

Ἀντιστρόφως. Ἂν ὁ ἀριθμητὴς τοῦ $\frac{15}{6}$ διαιρεθῇ διὰ 3, προκύπτει τὸ κλάσμα $\frac{5}{6}$, ὅπερ εἶναι τρεῖς φορὰς μικρότερον τοῦ ἄλλου· καὶ ἂν ὁ ἀριθμητὴς τοῦ $\frac{10}{6}$ διαιρεθῇ διὰ 2, προκύπτει τὸ $\frac{5}{6}$, ὅπερ εἶναι δύο φορὰς μικρότερον αὐτοῦ.

127. *Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς κλάσματός τινος πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 2, 3, 4, 5 κτλ., τὸ κλάσμα γίνεται δίς, τρίς, τετράκις, πεντάκις μικρότερον· ἐὰν δὲ ὁ παρονομαστὴς διαιρεθῇ, τὸ κλάσμα γίνεται δίς, τρίς, τετράκις, πεντάκις μεγαλείτερον.*

Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{5}{12}$. Τοῦτο παριστᾷ τὸ μερίδιον ἑκάστου ἀνθρώπου, ὅταν 5 ἀκεραίας μονάδας μοιράσουν 12 ἄνθρωποι. Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι, ἂν οἱ ἡμίσεις τούτων ἀφήσουν τὸ μερίδιά των ἐξ ἴσου εἰς τοὺς ἄλλους 6, οὗτοι θὰ λάβουν διπλάσια μερίδια. Ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ὡς νὰ ἐμοίρασαν οἱ 6 μόνον ἄνθρωποι 5 μονάδας, ὁπότε τὸ μερίδιον ἑκάστου παρίσταται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ $\frac{5}{6}$· τὸ κλάσμα λοιπὸν τοῦτο εἶναι διπλάσιον τοῦ πρώτου καὶ προκύπτει ἐξ αὐτοῦ, ἂν ὁ παρονομαστὴς διαιρεθῇ διὰ 2. Ὁμοίως συλλογιζόμενοι εὑρίσκομεν ὅτι, ἂν ὁ παρονομαστὴς τοῦ $\frac{5}{12}$ διαιρεθῇ διὰ 3, τὸ κλάσμα $\frac{5}{4}$, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν, εἶναι τρεῖς φορὰς μεγαλείτερον καὶ καθ' ἑξῆς.

Ἂν πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 2 τὸν παρονομαστὴν τοῦ $\frac{5}{6}$, προκύπτει τὸ $\frac{5}{12}$, ὅπερ εἶναι δύο φορὰς μικρότερον· καὶ ἂν πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 3 τὸν παρονομαστὴν τοῦ $\frac{5}{4}$, προκύπτει τὸ $\frac{5}{12}$, ὅπερ εἶναι τρεῖς φορὰς μικρότερον.

Ἁπλοποίησις τῶν κλασμάτων.

128. *Ἁπλοποίησις κλάσματος* λέγεται ἡ πρᾶξις, δι' ἧς ἐκ τοῦ δοθέντος εὑρίσκομεν ἄλλο κλάσμα ἴσον καὶ μὲ ἁπλουστέρους ὅρους, Ἡ πρᾶξις αὕτη στηρίζεται ἐπὶ τῆς ἰδιότητος, καθ' ἥν, *ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἢ διαιρέσωμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους κλάσματός τινος*

ἐπὶ τὸν ἴδιον ἀριθμόν, προκύπτει κλάσμα ἴσον. Ἐὰν λοιπὸν ἔχωμεν τὸ κλάσμα $\frac{10}{100}$, διαιροῦντες καὶ τοὺς δύο ὅρους αὐτοῦ διὰ 10 εὑρίσκομεν $\frac{1}{10}$· τοῦτο εἶναι ἴσον καὶ ἁπλούστερον τοῦ δοθέντος. Ὁμοίως ἁπλοποιοῦντες τὸ κλάσμα $\frac{14}{16}$ διὰ τοῦ 2 εὑρίσκομεν κλάσμα ἴσον, τὸ $\frac{7}{8}$, κτλ. Δυνάμεθα μάλιστα ἐπανειλημμένως νὰ κάμωμεν πολλὰς ἁπλοποιήσεις, ἀρκεῖ νὰ ὑπάρχουν κοινοὶ διαιρέται τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ παρονομαστοῦ. Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{18}{30}$· ἁπλοποιοῦντες διὰ 2 εὑρίσκομεν $\frac{9}{15}$, ἁπλοποιοῦντες καὶ τοῦτο διὰ 3 εὑρίσκομεν $\frac{3}{5}$.

129. Κλάσμα, τοῦ ὁποίου δὲν ὑπάρχει ἁπλούστερον, δηλ. ἴσον καὶ μὲ μικροτέρους ἀκεραίους ὅρους, λέγεται *ἀνάγωγον*. Τοιαῦτα εἶναι τὰ κλάσματα $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{8}{9}$ κτλ.

Σημ. Τὸ τελευταῖον κλάσμα, εἰς τὸ ὁποῖον καταντῶμεν μετὰ πᾶσαν δυνατὴν ἁπλοποίησιν, εἶναι πάντοτε *ἀνάγωγον*.

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ ἁπλοποιηθῶσι τὰ κλάσματα :

$$\frac{10}{100},\quad \frac{10}{1000},\quad \frac{100}{1000},\quad \frac{10}{10000},\quad \frac{84}{210},\quad \frac{8}{16},\quad \frac{2}{12},\quad \frac{12}{18}.$$

2) Τὸ $\frac{1}{10}$ πρὸς πόσα ἑκατοστὰ εἶναι ἴσον ; πρὸς πόσα χιλιοστά ; πρὸς πόσα δεκάκις χιλιοστά ;

3) Τὸ $\frac{1}{10000}$ τί μέρος τοῦ ἑνὸς δεκάτου εἶναι ; ποῖον τοῦ ἑκατοστοῦ ; καὶ ποῖον τοῦ χιλιοστοῦ ;

4) Τὸ $\frac{1}{1000}$ νὰ γίνῃ δέκα φορὰς μεγαλείτερον.

5) Τὸ $\frac{1}{100}$ πόσας φορὰς εἶναι μεγαλείτερον τοῦ $\frac{1}{1000}$; πόσας δὲ φορὰς μικρότερον τοῦ $\frac{1}{10}$;

6) Τὸ $\frac{1}{10000}$ πόσας φορὰς εἶναι μικρότερον τοῦ $\frac{1}{10}$; τοῦ $\frac{1}{100}$; τοῦ $\frac{1}{1000}$;

7) Τὸ $\frac{1}{10}$ νὰ γίνῃ δέκα φορὰς μικρότερον· τὸ αὐτὸ κλάσμα νὰ γίνῃ ἑκατὸν φορὰς μικρότερον.

Τροπὴ ἀκεραίου εἰς κλάσμα ἔχον τὴν αὐτὴν ἀξίαν.

130. Ἔστω ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς 4, ὅστις πρόκειται νὰ τραπῇ εἰς κλάσμα ἔχον παρονομαστὴν 7.

Ὁ ἀκέραιος 4 ἀναλύεται εἰς $1+1+1+1$. Ἑκάστη δὲ ἀκεραία μονὰς παρίσταται ὡς κλάσμα ἔχον παρονομαστὴν 7, οὕτως $\frac{7}{7}$· αἱ 4 δὲ ἀκέραιαι μονάδες θὰ παρασταθῶσιν ὑπὸ τετραπλασίου κλάσματος, ἤτοι τοῦ $\frac{7\times4}{7}$· ὅθεν $4=\frac{4\times7}{7}$.

Ἐκ τούτου συνάγομεν ὅτι:

Διὰ νὰ τρέψωμεν ἀκέραιον εἰς κλάσμα, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ ὡρισμένον παρονομαστήν, γράφομεν ὑπεράνω τούτου ὡς ἀριθμητὴν τὸ γινόμενον τοῦ παρονομαστοῦ ἐπὶ τὸν δοθέντα ἀριθμόν.

Σημ. Εἰς τὸ αὐτὸ καταντῶμεν, καὶ ἐὰν γράψωμεν τὸν ἀκέραιον ὡς κλάσμα ἔχον παρονομαστὴν τὴν μονάδα καὶ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος τούτου ἐπὶ τὸν δοθέντα παρονομαστήν· οἷον $4=\frac{4}{1}=\frac{4\times7}{7}$.

Τροπὴ μικτοῦ εἰς κλάσμα ἔχον τὴν αὐτὴν ἀξίαν.

132. Ἔστω ὁ μικτὸς $6+\frac{1}{3}$, τὸν ὁποῖον πρόκειται νὰ τρέψωμεν εἰς κλασματικόν. Πρὸς τοῦτο τὸν ἀκέραιον 6 γράφομεν ὡς κλάσμα ἔχον παρονομαστὴν τὸν τοῦ κλάσματος, καὶ τότε θὰ ἔχωμεν $6+\frac{1}{3}=\frac{6\times3}{3}+\frac{1}{3}$. Ἀλλ' εἶναι φανερόν, ὅτι 6×3 τρίτα, ἤτοι 18 τρίτα καὶ 1 τρίτον κάμνουν $6\times3+1$ τρίτα, ἤτοι

$$\frac{6\times3+1}{3}, \quad \text{ὥστε } 6+\frac{1}{3}=\frac{6\times3+1}{3}.$$

Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν τὸν κανόνα :

Διὰ νὰ τρέψωμεν μικτὸν εἰς κλασματικόν, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιον ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος καὶ εἰς τὸ γινόμενον προσθέτομεν τὸν ἀριθμητήν, ὑπὸ τὸν προκύπτοντα δὲ ἀριθμὸν γράφομεν παρονομαστὴν τὸν τοῦ κλάσματος.

Ἐξαγωγὴ τῶν ἀκεραίων μονάδων, τῶν περιεχομένων εἰς κλάσμα.

133. Ὅταν ἔχωμεν κλάσμα μεγαλείτερον τῆς ἀκεραίας μονάδος, οἷον τὸ $\frac{23}{5}$, καὶ θέλωμεν νὰ εὕρωμεν πόσας ἀκεραίας μονάδας περιέχει, ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὰ 23 πέμπτα 5 πέμπτα, δηλ. $\frac{5}{5}$· καὶ θὰ ἔχωμεν μίαν ἀκεραίαν μονάδα, θὰ μείνωσι δὲ καὶ 15 πέμπτα, ἐκ τῶν ὁποίων πάλιν ἀφαιροῦμεν 5 πέμπτα καὶ θὰ ἔχωμεν ἄλλην μίαν ἀκεραίαν μονάδα, μένουσι δὲ καὶ 13 πέμπτα· ἐξακολουθοῦντες οὕτω θὰ εὕρωμεν τόσας ἀκεραίας μονάδας, ὅσας φορὰς ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὰ 23 πέμπτα 5 πέμπτα, δηλ. ὅσας φορὰς ὁ 5 εἰσχωρεῖ εἰς τὸν 23, ὅπερ εὑρίσκομεν διαιροῦντες τὸν 23 διὰ 5· ἐκτελοῦντες τὴν πρᾶξιν εὑρίσκομεν 4 ἀκεραίας μονάδας, μένουσι δὲ καὶ $\frac{3}{5}$, ὅθεν $\frac{23}{5} = 4 + \frac{3}{5}$.

134. Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα:

Διὰ νὰ ἐξαγάγωμεν τὰς ἀκεραίας μονάδας, τὰς περιεχομένας εἰς κλάσμα μεγαλείτερον τῆς μονάδος, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ· τὸ πηλίκον παριστᾷ τὸν ἀριθμὸν τῶν εἰς τὸ κλάσμα περιεχομένων ἀκεραίων μονάδων, τὰς ὁποίας αὐξάνομεν κατὰ κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν τὸ ὑπόλοιπον, ἐὰν ὑπάρχῃ, καὶ παρονομαστὴν τὸν τοῦ κλάσματος.

Τροπὴ τῶν ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα.

135. Ἡ τροπὴ ὁσωνδήποτε ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα στηρίζεται ἐπὶ τῆς ἰδιότητος, καθ' ἥν, *ὅταν καὶ οἱ δύο ὅροι κλάσματός τινος πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ τὸν ἴδιον ἀριθμόν, προκύπτει κλάσμα ἴσον.*

Ἔστωσαν κατὰ πρῶτον δύο κλάσματα, τὰ $\frac{3}{4}$ καὶ $\frac{2}{5}$. Ἐὰν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ πρώτου κλάσματος πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν 5 τοῦ δευτέρου, καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν 4 τοῦ πρώτου, προκύπτουσιν ἐκ τῶν $\overset{(4)}{\frac{3}{4}}$, $\overset{(5)}{\frac{2}{5}}$

τὰ ἴσα καὶ ὁμώνυμα κλάσματα $\frac{15}{20}$ καὶ $\frac{8}{20}$· ὁμοίως ἐκ τῶν $\frac{2}{7}$, $\frac{4}{5}$ προκύπτουσι τὰ $\frac{10}{35}$, $\frac{28}{35}$ κτλ. Ὅθεν:

Ἵνα τρέψωμεν δύο ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα, πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο ὅρους ἑκατέρου ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ ἄλλου.

Ἔστωσαν τὰ κλάσματα $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{5}{12}$, εἰς τὰ ὁποῖα ὁ μεγαλείτερος παρονομαστὴς 12 διαιρεῖται διὰ τοῦ 3 καὶ δίδει πηλίκον 4. Ἐὰν μὲ τὸ πηλίκον τοῦτο πολλαπλασιάσωμεν τοὺς 2 ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{2}{3}$, θὰ ἔχωμεν τὸ ἴσον κλάσμα $\frac{8}{12}$ καὶ οὕτως ἀντὶ τῶν $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{5}{12}$ θὰ ἔχωμεν τὰ ὁμώνυμα $\frac{8}{12}$ καὶ $\frac{5}{12}$. Ὁμοίως εἰς τὰ κλάσματα $\frac{4}{7}$ καὶ $\frac{2}{14}$, ἐὰν τοὺς δύο ὅρους τοῦ πρώτου πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸ πηλίκον 14 : 7, ἤτοι τὸ 2, λαμβάνομεν τὰ ὁμώνυμα κλάσματα $\frac{8}{14}$ καὶ $\frac{9}{14}$. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι:

Ὅταν ὁ μεγαλείτερος παρονομαστὴς διαιρῆται διὰ τοῦ μικροτέρου, εὑρίσκομεν τὸ ἀκέραιον αὐτῶν πηλίκον καὶ πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τοῦτο τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος, τοῦ ἔχοντος τὸν μικρότερον παρονομαστήν.

Ὁμοίως, *ἐὰν ἔχωμεν τρία ἢ καὶ περισσότερα κλάσματα καὶ οἱ μικρότεροι παρονομασταὶ διαιρῶσι τὸν μεγαλείτερον, διαιροῦμεν αὐτὸν δι' ἑνὸς ἑκάστου καὶ ἐπὶ τὸ πηλίκον πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος, εἰς τὸ ὁποῖον ἀνήκει ὁ παρονομαστής, ὅστις ἐλήφθη ὡς διαιρέτης.*

Παράδειγμα. Ἔστωσαν τὰ κλάσματα $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$, εἰς τὰ ὁποῖα ὁ μεγαλείτερος παρονομαστὴς 12 διαιρεῖται δι' ὅλων τῶν μικροτέρων· διαιροῦντες τὸν 12 διὰ τοῦ 3 εὑρίσκομεν πηλίκον 4, ὅπερ γράφομεν ὑπεράνω τοῦ πρώτου κλάσματος $\frac{2}{3}$, εἰς τὸ ὁποῖον ὁ παρονομαστὴς 3 ἀνήκει. Ὁμοίως πράττομεν καὶ διὰ τὰ λοιπὰ κλάσματα, καὶ οὕτω ἔχομεν

$$\overset{(4)}{\frac{2}{3}},\quad \overset{(3)}{\frac{5}{4}},\quad \overset{(2)}{\frac{1}{6}},\quad \overset{(1)}{\frac{1}{12}},$$

πολλαπλασιάζοντες τοὺς δύο ὅρους ἑκάστου κλάσματος ἐπὶ τὸν ὑπεράνω αὐτοῦ ἀριθμὸν εὑρίσκομεν $\frac{8}{12}$, $\frac{15}{12}$, $\frac{2}{12}$, $\frac{1}{12}$, τὰ ὁποῖα εἶναι ὁμώνυμα.

Ὁμοίως εἰς τὰ κλάσματα $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{15}$ ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο ὅρους ἑκάστου κατὰ σειρὰν ἐπὶ τὰ πηλίκα $15 : 3=5$, $15 : 5=3$, $15 : 15=1$, ἅτινα γράφομεν ὑπεράνω τῶν κλασμάτων οὕτω $\overset{(5)}{\frac{2}{3}}$, $\overset{(3)}{\frac{4}{5}}$, $\overset{(1)}{\frac{6}{15}}$, εὑρίσκομεν τὰ ὁμώνυμα κλάσματα $\frac{10}{15}$, $\frac{12}{15}$, $\frac{6}{15}$.

Ἐὰν ὅλοι οἱ παρονομασταὶ δὲν διαιρῶσι τὸν μεγαλείτερον, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ 2, 3 κτλ. μέχρις ὅτου εὕρωμεν ἀριθμὸν διαιρετὸν δι᾽ ὅλων τῶν παρονομαστῶν, ἢ εὑρίσκομεν τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον αὐτῶν καὶ τότε διαιροῦμεν αὐτὸ δι᾽ ἑκάστου τῶν παρονομαστῶν καὶ μὲ τὰ πηλίκα πράττομεν, ὅπως καὶ εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν.

Ἔστωσαν τὰ κλάσματα $\frac{1}{12}$, $\frac{2}{15}$, $\frac{3}{40}$, $\frac{7}{24}$.

Τριπλασιάζοντες τὸν μεγαλείτερον παρονομαστὴν 40 εὑρίσκομεν 120· οὗτος διαιρεῖται δι᾽ ὅλων τῶν παρονομαστῶν· διαιροῦντες τοῦτον δι᾽ ἑνὸς ἑκάστου αὐτῶν εὑρίσκομεν πηλίκα:

$$120 : 12=10,\ 120 : 15=8,\ 120 : 40=3,\ 120 : 24=5.$$

Ἕκαστον τῶν πηλίκων τούτων γράφοντες ὑπεράνω τοῦ κλάσματος, εἰς τὸ ὁποῖον ἀνήκει ὁ διαιρέτης ὡς παρονομαστής, οὕτω

$$\overset{(10)}{\frac{1}{12}},\quad \overset{(8)}{\frac{2}{15}},\quad \overset{(3)}{\frac{3}{40}},\quad \overset{(5)}{\frac{7}{24}},$$

πολλαπλασιάζοντες δὲ τοὺς δύο ὅρους ἑκάστου κλάσματος ἐπὶ τὸ ὑπεράνω αὐτοῦ πηλίκον εὑρίσκομεν $\frac{10}{120}$, $\frac{16}{120}$, $\frac{9}{120}$, $\frac{35}{120}$. Ὁμοίως ἐκ τῶν $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{5}{12}$ τριπλασιάζοντες τὸν 12 καὶ διαιροῦντες δι᾽ ἑκάστου τῶν παρονομαστῶν ἔχομεν:

$$36 : 4=9,\quad 36 : 6=6,\quad 36 : 9=4,\quad 36 : 12=3\cdot \text{ ὅθεν}$$

$\overset{(9)}{\frac{3}{4}}$, $\overset{(6)}{\frac{5}{6}}$, $\overset{(4)}{\frac{4}{9}}$, $\overset{(3)}{\frac{5}{12}}$, ἐξ ὧν εὑρίσκομεν $\frac{27}{36}$, $\frac{30}{36}$, $\frac{16}{36}$, $\frac{15}{36}$.

Ὅταν ἡ ἀνωτέρω μέθοδος δὲν ἐφαρμόζηται, τότε *διὰ νὰ τρέψωμεν τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα, πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο ὅρους ἑκάστου ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν τῶν ἄλλων κλασμάτων.*

Ἔστωσαν τὰ κλάσματα $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$· πολλαπλασιάζοντες τοὺς δύο ὅρους τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸ γινόμενον 15 τῶν παρονομαστῶν τῶν δύο ἄλλων κλασμάτων, τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{2}{3}$ ἐπὶ τὸ γινόμενον 2×5, ἤτοι 10 καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ $\frac{4}{5}$ ἐπὶ 3×2, ἤτοι 6, οὕτως

$$\overset{(15)}{\frac{1}{2}},\quad \overset{(10)}{\frac{2}{3}},\quad \overset{(6)}{\frac{4}{5}}$$ εὑρίσκομεν $\frac{15}{30}$, $\frac{20}{30}$, $\frac{24}{30}$, κλάσματα ὁμώνυμα.

Ὁμοίως ἐκ τῶν κλασμάτων $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{5}$ εὑρίσκομεν $\frac{80}{280}$, $\frac{105}{280}$, $\frac{224}{280}$.

Σύγκρισις δύο ἢ περισσοτέρων κλασμάτων.

136. Ὅταν συγκρίνωμεν δύο ἢ περισσότερα ἑτερώνυμα κλάσματα, πολλάκις εἶναι δύσκολον νὰ ἐννοήσωμεν ποῖον εἶναι τὸ μεγαλείτερον τούτων. Ἐὰν ὅμως τρέψωμεν ταῦτα εἰς ὁμώνυμα, τότε ἀμέσως τὰ διακρίνομεν ἐκ τῶν ἀριθμητῶν. Ἐὰν πρόκηται νὰ συγκρίνωμεν τὰ κλάσματα $\frac{56}{9}$, $\frac{125}{19}$, δύσκολον εἶναι νὰ διακρίνωμεν τὸ μεγαλείτερον τούτων. Ὅταν ὅμως τρέψωμεν ταῦτα εἰς ὁμώνυμα, εὑρίσκομεν $\frac{1064}{171}$, $\frac{1125}{171}$· βλέπομεν δ' ἐκ τούτου ὅτι, ἵνα σχηματισθῇ τὸ πρῶτον, ἡ μονὰς $\frac{1}{171}$ ἐπανελήφθη 1064 φοράς· ἵνα δὲ σχηματισθῇ τὸ δεύτερον, ἡ αὐτὴ μονὰς ἐπανελήφθη 1125 φοράς. Ἐπομένως τὸ δεύτερον εἶναι μεγαλείτερον.

Ἀσκήσεις.

Νὰ τραπῶσιν εἰς ὁμώνυμα τὰ κλάσματα.

$$\frac{1}{5}\ \frac{4}{15},\quad \frac{2}{3}\ \frac{4}{5},\quad \frac{3}{4}\ \frac{1}{2},\quad \frac{2}{3}\ \frac{2}{7}\ \frac{1}{21},\quad \frac{2}{5}\ \frac{4}{3}\ \frac{5}{30},\quad \frac{1}{2}\ \frac{2}{5}\ \frac{3}{7}.$$

$$\frac{3}{4}\ \frac{1}{3}\ \frac{5}{8}\ \frac{7}{12},\quad \frac{1}{2}\ \frac{3}{5}\ \frac{4}{7}\ \frac{1}{6},\quad \frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{5}.$$

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

Ὁρισμοί.

137. *Πρόσθεσις λέγεται ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας, δοθέντων δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν, εὑρίσκομεν ἄλλον περιέχοντα πάσας τὰς μονάδας τῶν δοθέντων.*

Οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ λέγονται *προσθετέοι*, ὁ δὲ περιέχων πάσας τὰς μονάδας τῶν δοθέντων λέγεται *ἄθροισμα* ἢ *κεφάλαιον*.

Ἡ πρόσθεσις σημειοῦται καὶ πάλιν διὰ τοῦ σημείου $+$.

Σημ. Ὅπως εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν ἀκεραίων εἴδομεν ὅτι, ἐὰν οἱ προσθετέοι εἶναι συγκεκριμένοι ἀριθμοί, πρέπει νὰ παριστῶσι τὸ αὐτὸ πρᾶγμα, οὕτω καὶ ἐνταῦθα. Συγχρόνως ὅμως ἐνταῦθα τὰ κλάσματα πρέπει νὰ εἶναι καὶ ὁμώνυμα.

Πρόσθεσις κλασμάτων.

138. Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν τὰ κλάσματα $\frac{3}{5}+\frac{1}{5}+\frac{4}{5}$. Εἶναι φανερόν, ὅτι 3 πέμπτα καὶ 1 πέμπτον κάμνουσι 4 πέμπτα καὶ 4 πέμπτα κάμνουσι 8 πέμπτα, ἤτοι $\frac{8}{5}$, ὅθεν

$$\frac{3}{5}+\frac{1}{5}+\frac{4}{5}=\frac{8}{5}\cdot \text{ ὁμοίως } \frac{1}{7}+\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{6}{7}.$$

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι πρόκειται νὰ προστεθῶσι τὰ κλάσματα $\frac{2}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}$· τρέποντες ταῦτα εἰς ὁμώνυμα ἔχομεν

$$\overset{(35)}{\frac{2}{3}}+\overset{(21)}{\frac{1}{5}}+\overset{(15)}{\frac{1}{7}}=\frac{70}{105}+\frac{21}{105}+\frac{15}{105}=\frac{106}{105}.$$

Ἔστω τὸ ἄθροισμα $\frac{1}{8}+\frac{4}{7}+\frac{1}{9}$· τοῦτο εἶναι ἴσον τῷ

$$\frac{63}{504}+\frac{288}{504}+\frac{56}{504}=\frac{407}{504}.$$

139. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι:

Ἵνα προσθέσωμεν δύο ἢ περισσότερα κλάσματα, ἐὰν μὲν ταῦτα εἶναι ὁμώνυμα, τότε προσθέτομεν τοὺς ἀριθμητὰς καὶ ὑπὸ τὸ ἄθροισμα γράφομεν τὸν κοινὸν παρονομαστήν· ἐὰν δὲ εἶναι ἑτερώνυμα, τρέπομεν ταῦτα εἰς ὁμώνυμα καὶ ἔπειτα προσθέτομεν ὡς προηγουμένως.

Πρόσθεσις μικτῶν.

140. Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι πρόκειται νὰ προστεθῶσιν οἱ μικτοὶ $4\frac{2}{3}+2\frac{1}{4}+5\frac{6}{7}$· προσθέτοντες τὰ κλάσματα λαμβάνομεν

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{6}{7}=\frac{56}{84}+\frac{21}{84}+\frac{82}{84}=\frac{149}{84}=1\ \frac{65}{84}.$$

προσθέτοντες καὶ τοὺς ἀκεραίους λαμβάνομεν $4+2+5=11$· ὅθεν τὸ ὁλικὸν ἄθροισμα εἶναι $11+1\frac{65}{84}=12\frac{65}{84}$.

141. Ἐκ τούτων συνάγομεν ὅτι,

Ἵνα προσθέσωμεν μικτούς, προσθέτομεν χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα καὶ ἑνοῦμεν τὰ δύο ἀθροίσματα.

Ἀσκήσεις.

$\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}$, $\frac{3}{4}+\frac{2}{8}+\frac{1}{12}$, $\frac{2}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}$,

$1+\frac{2}{10}+\frac{7}{100}$, $\frac{2}{10}+\frac{3}{100}+\frac{6}{1000}$, $3+\frac{4}{100}+5\frac{6}{100}+4\frac{2}{1000}$,

$\frac{4}{7}+\frac{1}{4}+\frac{5}{8}$, $2\frac{1}{6}+3\frac{4}{7}+4\frac{3}{8}$, $5\frac{2}{3}+8+7\frac{4}{5}+4$.

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

142. *Ἀφαίρεσις λέγεται ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας ἐλαττοῦμεν δοθέντα ἀριθμὸν κατὰ τόσας μονάδας, ὅσας ἔχει ἄλλος τις δοθεὶς ἀριθμός.*

Ὁ ἀριθμός, ὅστις πρόκειται νὰ ἐλαττωθῇ, λέγεται καὶ πάλιν *μειωτέος*· δύναται δὲ νὰ εἶναι ἀκέραιος ἢ κλασματικὸς ἢ μικτός.

Ὁ ἀριθμός, ὅστις δεικνύει κατὰ πόσας μονάδας θὰ ἐλαττωθῇ ὁ μειωτέος, λέγεται *ἀφαιρετέος*. Ὁ ἀριθμὸς δέ, τὸν ὁποῖον εὑρίσκομεν μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς πράξεως, λέγεται *διαφορὰ* ἢ *ὑπόλοιπον*. Ἡ ἀφαίρεσις σημειοῦται καὶ πάλιν διὰ τοῦ σημείου —, τιθεμένου μεταξὺ μειωτέου καὶ ἀφαιρετέου.

Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι, ἐὰν τὰς μονάδας, τὰς ὁποίας ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ μειωτέου, δηλ. τὸν ἀφαιρετέον, ἑνώσωμεν μετὰ τῶν μονάδων, αἵτινες μένουσιν, ἤτοι τῆς διαφορᾶς, θὰ ἔχωμεν τὸν μειωτέον.

Ἐκ τούτου συνάγομεν ὅτι:

Εἰς πᾶσαν ἀφαίρεσιν ὁ μειωτέος εἶναι ἄθροισμα τοῦ ἀφαιρετέου καὶ τῆς διαφορᾶς.

Ἀφαίρεσις δύο κλασμάτων.

143. Ἔστωσαν τὰ ὁμώνυμα κλάσματα $\frac{5}{7}-\frac{2}{7}$· εἶναι φανερὸν ὅτι, ἐὰν ἀπὸ τὰ 5 ἕβδομα ἀφαιρέσωμεν 2 ἕβδομα, θὰ μείνωσι 3 ἕβδομα, ἤτοι $\frac{3}{7}$. Ἔχομεν λοιπὸν $\frac{5}{7}-\frac{2}{7}=\frac{3}{7}$.

Ἔστωσαν τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα $\frac{5}{6}-\frac{2}{7}$· τρέποντες ταῦτα εἰς ὁμώνυμα λαμβάνομεν:

$$\frac{5}{6}-\frac{2}{7}=\frac{35}{42}-\frac{12}{42}=\frac{23}{42}.$$

Ἐκ τῶν παραδειγμάτων τούτων συνάγομεν ὅτι:

144. *Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν δύο κλάσματα, ἐὰν ταῦτα εἶναι ὁμώνυμα, ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ μειωτέου τὸν ἀριθμητὴν τοῦ ἀφαιρετέου καὶ ὑπὸ τὴν διαφορὰν γράφομεν παρονομαστὴν τὸν κοινόν· ἐὰν δὲ εἶναι ἑτερώνυμα, τρέπομεν πρῶτον εἰς ὁμώνυμα καὶ ἔπειτα ἀφαιροῦμεν, ὡς ἀνωτέρω.*

Ἀφαίρεσις μικτῶν.

145. *Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν μικτούς, ἀφαιροῦμεν χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα καὶ ἔπειτα ἑνοῦμεν τὰς δύο διαφοράς, ἢ τρέπομεν τοὺς μικτοὺς εἰς κλασματικοὺς καὶ ἀφαιροῦμεν, ὡς ἐμάθομεν.*

Ἔστω πρὸς ἐκτέλεσιν ἡ ἀφαίρεσις $5\frac{6}{7}-2\frac{3}{8}$.

Ἀφαιροῦντες τὰ κλάσματα

$$\frac{6}{7}-\frac{3}{8}=\frac{48}{56}-\frac{21}{56}=\frac{27}{56},$$

ἀφαιροῦντες καὶ τοὺς ἀκεραίους $5-2=3$, ἑνοῦντες δὲ τὰς δύο διαφορὰς εὑρίσκομεν $5\frac{6}{7}-2\frac{3}{8}=3\frac{27}{56}$.

Ὡσαύτως ἀφαιροῦντες $6\frac{4}{10} - 2\frac{5}{100}$ εὑρίσκομεν

$$6\frac{4}{10} - 2\frac{5}{100} = 6\frac{40}{100} - 2\frac{5}{100} = 4\frac{35}{100}.$$

146. **Ἰδιαίτεραι περιπτώσεις.** Ἐὰν ἔχωμεν μικτοὺς καὶ τὸ κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου εἶναι μεγαλείτερον τοῦ κλάσματος, τοῦ μειωτέου, *τρέπομεν μίαν μονάδα ἐκ τοῦ ἀκεραίου τοῦ μειωτέου εἰς κλάσμα ὁμώνυμον τοῦ κλάσματος τοῦ μειωτέου, καὶ προσθέτομεν εἰς αὐτό, μετὰ δὲ ταῦτα ἐκτελοῦμεν τὴν ἀφαίρεσιν.*

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι πρόκειται νὰ ἀφαιρέσωμεν $5\frac{1}{4} - 2\frac{3}{5}$· ἂν τρέψωμεν τὰ κλάσματα ταῦτα εἰς ὁμώνυμα, θὰ ἔχωμεν

$$5\frac{1}{4} - 2\frac{3}{5} = 5\frac{5}{20} - 2\frac{12}{20}$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ εἶναι ἀδύνατον ἀπὸ τὰ $\frac{5}{20}$ νὰ ἀφαιρέσωμεν $\frac{12}{20}$, λαμβάνομεν ἀπὸ τοῦ 5 μίαν μονάδα, τὴν ὁποίαν τρέπομεν εἰς $\frac{20}{20}$ καὶ τὴν προσθέτομεν εἰς τὰ $\frac{5}{20}$ καὶ τότε θὰ ἔχωμεν

$$4\frac{25}{20} - 2\frac{12}{20} = 2\frac{13}{20}$$

Ἂν πρόκηται νὰ ἀφαιρέσωμεν $5 - 2\frac{1}{3}$, λαμβάνομεν μίαν ἀκεραίαν μονάδα τοῦ μειωτέου, γράφομεν αὐτὴν ὡς κλάσμα ὁμώνυμον τοῦ κλάσματος τοῦ ἀφαιρετέου καὶ ἀφαιροῦμεν ὡς ἑξῆς:

$$5 - 2\frac{1}{3} = 4\frac{3}{3} - 2\frac{1}{3} = 2\frac{2}{3}$$

Ἂν ἔχωμεν ν' ἀφαιρέσωμεν $8\frac{3}{4} - 2$, εἶναι φανερόν, ὅτι μόνον ὁ ἀκέραιος τοῦ μειωτέου θὰ ἐλαττωθῇ κατὰ 2 μονάδας καὶ θὰ ἔχωμεν $8\frac{3}{4} - 2 = 6\frac{3}{4}$.

Ἀσκήσεις.

Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑξῆς πράξεις:

$$2\frac{5}{7} + 4\frac{2}{3} - 5\frac{1}{3},\quad 3\frac{2}{5} - \frac{4}{7},\quad \frac{5}{10} - \frac{8}{100},$$

$$3\frac{8}{10} - \frac{2}{100},\quad 9 - 3\frac{7}{10},\quad 7\frac{8}{5} - 2\frac{4}{15},\quad 9\frac{2}{5} - 7\frac{6}{7}.$$

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

147. *Πολλαπλασιασμὸς λέγεται ἡ πρᾶξις, δι' ἧς, δοθέντων δύο ἀριθμῶν, σχηματίζομεν τρίτον ἐκ τοῦ πρώτου, ὅπως ὁ δεύτερος ἐσχηματίσθη ἐκ τῆς ἀκεραίας μονάδος.*

Καὶ ἐνταῦθα ὁ πρῶτος τῶν δοθέντων ἀριθμῶν λέγεται *πολλαπλασιαστέος* καὶ εἶναι ὁ κυρίως παράγων, ὁ δὲ δεύτερος *πολλαπλασιαστής*, θεωρεῖται δὲ πάντοτε ὡς ἀφῃρημένος ἀριθμὸς καὶ χρησιμεύει ὡς *ὁδηγός*. Ὁ ἀριθμός, τὸν ὁποῖον ἐκ τῆς πράξεως εὑρίσκομεν, λέγεται *γινόμενον* καί, ἐπειδὴ γίνεται ἐκ τοῦ πολλαπλασιαστέου, εἶναι πάντοτε ὁμοειδὴς πρὸς αὐτόν.

148. Καὶ εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν κλασμάτων πᾶσαι αἱ ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἀκεραίων ἰσχύουσι. Π. χ. τὸ γινόμενον δὲν ἀλλάσσει, ἐὰν κάμωμεν τὸν πολλαπλασιαστέον πολλαπλασιαστήν, κτλ.

Πολλαπλασιασμὸς κλάσματος ἐπὶ ἀκέραιον.

149. Ἔστω π. χ. πρὸς ἐκτέλεσιν ὁ πολλαπλασιασμὸς $\frac{3}{5} \times 4$.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τὸ γινόμενον θὰ σχηματισθῇ ἐκ τοῦ $\frac{3}{5}$, καθὼς ὁ 4 ἔγινεν ἐκ τοῦ 1. Ἑπομένως εἶναι

$$\frac{3}{5} \times 4 = \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} = \frac{3 \times 4}{5}.$$

Ὁμοίως κατὰ τὴν ἰδιότητα (126-7) τῶν κλασμάτων εὑρίσκομεν

$$\frac{5}{12} \times 2 = \frac{10}{12} \text{ ἢ καὶ } \frac{5}{12} \times 2 = \frac{5}{12:2} = \frac{5}{6},$$

τὸ ὁποῖον θέλομεν εὕρῃ, καὶ ἂν ἁπλοποιήσωμεν τὸ κλάσμα $\frac{10}{12}$.

150. Ἐκ τούτων συνάγομεν ὅτι:

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν κλάσμα ἐπὶ ἀκέραιον, ἢ μόνον πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος ἐπὶ τὸν ἀκέραιον ἢ μόνον διαιροῦμεν τὸν παρονομαστήν.

151 Ἔστω ἤδη πρὸς ἐκτέλεσιν ὁ πολλαπλασιασμὸς $3\frac{5}{7} \times 4$. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ἔχομεν :

$$3\tfrac{5}{7} \times 4 = 3\tfrac{5}{7} + 3\tfrac{5}{7} + 3\tfrac{5}{7} + 3\tfrac{5}{7}.$$

προσθέτοντες χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους εὑρίσκομεν 3×4, προσθέτοντες δὲ καὶ τὰ κλάσματα εὑρίσκομεν $\frac{5\times4}{7}$. ὅθεν

$$3\tfrac{5}{7} \times 4 = 3 \times 4 + \tfrac{5\times4}{7} = 12 + \tfrac{20}{7} = 14\tfrac{6}{7}.$$

Τὸν αὐτὸν πολλαπλασιασμὸν δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν, ἐὰν τρέψωμεν τὸν μικτὸν $3\frac{5}{7}$ εἰς κλασματικὸν $\frac{26}{7}$, ὁπότε θὰ ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν κλάσμα ἐπὶ ἀκέραιον, ἤτοι $\frac{26}{7} \times 4 = \frac{104}{7} = 14\frac{6}{7}$.

152. Ἐκ τούτου συνάγομεν ὅτι:

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν μικτὸν ἐπὶ ἀκέραιον, ἢ πολλαπλασιάζομεν χωριστὰ τὸν ἀκέραιον καὶ χωριστὰ τὸ κλάσμα καὶ ἔπειτα ἑνοῦμεν τὰ δύο γινόμενα, ἢ τρέπομεν τὸν μικτὸν εἰς κλασματικὸν καὶ μετὰ ταῦτα πολλαπλασιάζομεν.

Πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ κλάσμα.

153. Ἔστω πρῶτον ὁ *πολλαπλασιαστέος ἀκέραιος*. Π. χ. ἔστω πρὸς ἐκτέλεσιν ὁ πολλαπλασιασμὸς $3 \times \frac{2}{5}$. Ὁ πολλαπλασιαστὴς $\frac{2}{5}$ ἐσχηματίσθη ἐκ τῆς μονάδος 1, ἀφοῦ τὸ *ἓν πέμπτον* αὐτῆς ἐλήφθη δύο φοράς· λοιπόν, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ὁμοίως θὰ σχηματισθῇ καὶ τὸ γινόμενον ἐκ τοῦ 3, θὰ λάβωμεν δηλ. τὸ ἓν πέμπτον τοῦ 3, ὅπερ εἶναι $\frac{3}{5}$, δύο φοράς, ἤτοι $\frac{3\times2}{5}$,

$$\text{ἄρα } 3 \times \tfrac{2}{5} = \tfrac{3\times2}{5} = 1 + \tfrac{1}{5}.$$

154. Ἐκ τούτου συνάγομεν ὅτι:

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀκέραιον ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιον ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν καὶ ὑπὸ τὸ γινόμενον γράφομεν παρονομαστὴν τὸν τοῦ κλάσματος.

155. Ἔστωσαν ἤδη ὁ *πολλαπλασιαστέος καὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς κλάσματα*, π. χ. $\frac{3}{4} \times \frac{5}{6}$. Καὶ ἐνταῦθα ὁ πολλαπλασιασμὸς

θὰ γίνῃ συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμόν, δηλ. θὰ λάβωμεν τὸ ἓν ἕκτον τοῦ πολλαπλασιαστέου $\frac{3}{4}$, ὅπερ εἶναι $\frac{3}{4\times6}$, πέντε φορὰς καὶ θὰ ἔχωμεν $\frac{3\times5}{4\times6}$, ἄρα $\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}=\frac{3\times5}{4\times6}$.

156. Ἐκ τούτου συνάγομεν ὅτι:

Τὸ γινόμενον δύο κλασμάτων εἶναι κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν καὶ παρονομαστὴν τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν.

Πολλαπλασιασμὸς μικτῶν.

157. *Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστέος ἢ ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι μικτὸς ἢ καὶ οἱ δύο παράγοντες, τότε τρέπομεν τοὺς μικτοὺς εἰς κλάσματα καὶ πολλαπλασιάζομεν ὡς ἀνωτέρω.*

Ἔστω ὡς παράδειγμα τὸ γινόμενον $4\times2\frac{3}{5}$· τρέποντες τὸν μικτὸν $2\frac{3}{5}$ εἰς κλάσμα ἴσον, τὸ $\frac{13}{5}$, ἔχομεν $4\times2\frac{3}{5}=4\times\frac{13}{5}=10\frac{2}{5}$.

Ὁμοίως ἐὰν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν $3\frac{2}{7}\times4\frac{1}{5}$, τρέποντες καὶ τοὺς δύο μικτοὺς εἰς κλάσματα εὑρίσκομεν·

$3\frac{2}{7}\times4\frac{1}{5}=\frac{23}{7}\times\frac{21}{5}=13\frac{28}{35}$, ἢ ἁπλοποιοῦντες $13\frac{4}{5}$.

Γενικὴ περίπτωσις.

158. *Πᾶσαι αἱ ἀνωτέρω περιπτώσεις δύνανται ν' ἀναχθῶσιν εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν δύο κλασμάτων, ἐάν, ὅταν ἔχωμεν μικτούς, τρέπωμεν αὐτοὺς εἰς κλάσματα· ὅταν δὲ εἷς τῶν παραγόντων εἶναι ἀκέραιος, γράφομεν παρονομαστὴν αὐτοῦ τὴν μονάδα, ὁπότε παρίσταται πλέον ὡς κλάσμα.*

Ἀσκήσεις.

Νὰ ἐκτελεσθῶσιν οἱ πολλαπλασιασμοὶ

$\frac{4}{7}\times2$, $2\times\frac{4}{7}$, $3\times\frac{7}{10}$. $\frac{2}{10}\times\frac{9}{100}$, $3\times2\frac{5}{8}$,
$4\frac{6}{7}\times8$, $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$, $3\frac{2}{5}\times6\frac{4}{9}$, $\frac{5}{9}\times3$, $9\times2\frac{7}{8}$,
$2\frac{3}{4}\times5\frac{4}{15}$.

Γινόμενον πολλῶν παραγόντων.

159. *Γινόμενον πολλῶν ἀριθμῶν ἢ παραγόντων λέγεται ὁ ἀριθμός, τὸν ὁποῖον εὑρίσκομεν πολλαπλασιάζοντες ἀριθμόν τινα ἐπὶ δεύτερον καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν ἐπὶ τρίτον καὶ τὸ νέον γινόμενον ἐπὶ τέταρτον καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, μέχρις ὅτου ληφθῶσιν ὅλοι οἱ παράγοντες.*

Σημ. Οἱ παράγοντες δύνανται νὰ εἶναι εἴτε ἀκέραιοι εἴτε κλασματικοί.

Ἔστω ὡς παράδειγμα τὸ γινόμενον $\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{5}{6}\times\frac{8}{9}$· πολλαπλασιάζοντες τοὺς δύο πρώτους ὅρους εὑρίσκομεν γινόμενον $\frac{3\times2}{4\times3}$, τοῦτο πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ τὸ τρίτον ἔχομεν $\frac{3\times2\times5}{4\times3\times6}$, καὶ τοῦτο πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν τέταρτον δίδει $\frac{3\times2\times5\times8}{4\times3\times6\times9}$, ἑπομένως $\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{5}{6}\times\frac{8}{9}=\frac{3\times2\times5\times8}{4\times3\times6\times9}$.

Ἔστω τὸ γινόμενον $\frac{3}{7}\times4\times\frac{6}{9}\times\frac{9}{15}\times12\times\frac{5}{6}$· πολλαπλασιάζοντες τοὺς δύο πρώτους εὑρίσκομεν $\frac{3\times4}{7}$, τοῦτο ἐπὶ τὸν $\frac{6}{9}$ δίδει $\frac{3\times4\times6}{7\times9}$, καὶ τοῦτο ἐπὶ $\frac{9}{15}$ δίδει $\frac{3\times4\times6\times9}{7\times9\times15}$, καὶ τοῦτο ἐπὶ τὸν 12 δίδει $\frac{3\times4\times6\times9\times12}{7\times9\times15}$, καὶ τοῦτο τέλος ἐπὶ $\frac{5}{6}$ δίδει τὸ γινόμενον $\frac{3\times4\times6\times9\times12\times5}{7\times9\times15\times6}$. ὅθεν ἔχομεν

$$\frac{3}{7}\times4\times\frac{6}{9}\times\frac{9}{15}\times12\times\frac{5}{6}=\frac{3\times4\times6\times9\times12\times5}{7\times9\times15\times6}.$$

160. Ἐκ τούτων συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

Τὸ γινόμενον πολλῶν κλασμάτων καὶ ἀκεραίων εἶναι κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν καὶ τῶν ἀκεραίων παραγόντων (ἐὰν ὑπάρχωσι) καὶ παρονομαστὴν τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν.

Ἐπειδὴ δὲ *γινόμενον πολλῶν ἀριθμῶν διαιρεῖται δι' ἀριθμοῦ, ἐὰν εἷς τῶν παραγόντων διαιρεθῇ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου.*

Δυνάμεθα νὰ ἁπλοποιήσωμεν τὰ ἀνωτέρω κλάσματα διαιροῦντες ἕνα τῶν παραγόντων τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ ἕνα τοῦ παρονομαστοῦ διὰ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ, ὅτε τὸ γινόμενον γίνεται ἁπλούστερον. Τὸ γινόμενον $\frac{3\times2\times5\times8}{4\times3\times6\times9}$, ἐὰν ἁπλοποιήσωμεν πρῶτον διὰ 3, ἔπειτα διὰ 4 καὶ διὰ 2, γίνεται $\frac{10}{27}$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν

$$\frac{3\times4\times6\times9\times12\times5}{7\times9\times15\times6}=\frac{\overset{\frown}{3\times4\times6\times9\times12\times5}}{7\times9\times\underset{\smile}{15\times6}}=\frac{4\times12}{7}=\frac{48}{7}=6\,\frac{6}{7}.$$

Σημ. Τὴν τοιαύτην ἁπλοποίησιν πρέπει νὰ ἐκτελῶμεν πρὸ τῆς ἐκτελέσεως τῶν πολλαπλασιασμῶν.

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

161. Ὁ γενικὸς ὁρισμὸς τῆς διαιρέσεως εἶναι ὡς ἑξῆς:

Διαίρεσις λέγεται ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας, δοθέντων δύο ἀριθμῶν εὑρίσκεται τρίτος, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν δεύτερον δίδει τὸν πρῶτον.

Ὁ πρῶτος τῶν δοθέντων ἀριθμῶν λέγεται *διαιρετέος*, ὁ δεύτερος *διαιρέτης*, ὁ δ' ἐκ τῆς πράξεως προκύπτων *πηλίκον*. Τοῦτο, καθὼς εἴδομεν, παρίσταται ὡς κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν τὸν διαιρετέον καὶ παρονομαστὴν τὸν διαιρέτην. Κατὰ δὲ τὸν ὁρισμόν, *εἰς πᾶσαν διαίρεσιν ὁ διαιρετέος εἶναι γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον.*

Ἡ διαίρεσις καὶ πάλιν σημειοῦται διὰ τοῦ σημείου : τιθεμένου μεταξὺ διαιρετέου καὶ διαιρέτου. Οὕτω 12 : 5 σημαίνει ὁ 12 νὰ διαιρεθῇ διὰ 5.

Διαίρεσις δι' ἀκεραίου.

162. *Διαιρετέος ἀκέραιος.* Ἔστω νὰ διαιρεθῇ 3 : 5· τὸ πηλίκον εἶναι, καθὼς καὶ ἄλλοτε εἴπομεν, $\frac{3}{5}$. Καὶ πράγματι τοῦτο πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ 5 δίδει 3, δηλ. εἶναι $\frac{3}{5}\times5=3$.

163. *Διαιρετέος κλάσμα.* Ὁμοίως τὸ πηλίκον τοῦ $\frac{8}{7}$: 4 εἶναι ἀριθμός, ὅστις κατὰ τὸν ὁρισμὸν πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 4, ἤτοι

τετραπλασιαζόμενος δίδει τὸν διαιρετέον $\frac{8}{7}$· ἄρα εἶναι τὸ τέταρτον τοῦ $\frac{8}{7}$, ἤτοι $\frac{8}{7\times 4}$. Πράγματι, τὸ κλάσμα τοῦτο πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ 4 δίδει $\frac{8\times 4}{7\times 4}=\frac{8}{7}$, ἤτοι τὸν διαιρετέον

Δυνάμεθα ὅμως, διὰ νὰ λάβωμεν τὸ τέταρτον τοῦ $\frac{8}{7}$, νὰ διαιρέσωμεν μόνον τὸν ἀριθμητὴν διὰ 4, ὅτε εὑρίσκομεν ὡς πηλίκον $\frac{7}{2}$. Πράγματι καὶ τοῦτο πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ 4 δίδει $\frac{2\times 4}{7}$, ἤτοι τὸν διαιρετέον.

164. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι:

Ἵνα διαιρέσωμεν κλάσμα δι' ἀκεραίου, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητήν του διὰ τοῦ διαιρέτου, ἐὰν διαιρῆται, ἢ πολλαπλασιάζομεν μόνον τὸν παρονομαστήν του ἐπὶ τὸν διαιρέτην.

165. *Διαιρετέος μικτός.* Ὅταν ὁ διαιρετέος εἶναι μικτός, ἵνα εὐκόλως ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν τρέπομεν αὐτὸν εἰς κλασματικόν. Ὑποθέσωμεν ὅτι πρόκειται νὰ διαιρέσωμεν $5\frac{8}{9} : 3$. Ἐὰν τρέψωμεν τὸν μικτὸν $5\frac{8}{9}$ εἰς κλάσμα τὸ $\frac{53}{9}$ θὰ ἔχωμεν νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν $\frac{53}{9} : 3$· κατὰ τὰ ἀνωτέρω τὸ πηλίκον εἶναι $\frac{53}{9\times 3}$. Τὴν αὐτὴν διαίρεσιν δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν καὶ χωρὶς νὰ τρέψωμεν τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα, σκεπτόμενοι καὶ ὡς ἑξῆς: *Εἶναι φανερόν, ὅτι ἀριθμὸς ἀποτελούμενος ἐκ πολλῶν μερῶν μερίζεται, ὅταν μερισθῶσι τὰ μέρη αὐτοῦ.* Συμφώνως πρὸς ταῦτα ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ $5+\frac{8}{9}$ λαμβάνοντες τὸ τρίτον τοῦ 5 ἔχομεν $\frac{5}{3}$, λαμβάνοντες δὲ καὶ τὸ τρίτον τοῦ $\frac{8}{9}$ ἔχομεν $\frac{8}{9\times 3}$· ὅθεν τὸ πηλίκον εἶναι $\frac{5}{3}+\frac{8}{9\times 3}$, ἤτοι εἶναι $5\frac{8}{9} : 3=\frac{5}{3}+\frac{8}{9\times 3}$. Ὅτι πράγματι τοῦτο εἶναι τὸ πηλίκον, βλέπομεν, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν διαιρέτην· διότι τότε θὰ ἔχωμεν $(\frac{5}{3}+\frac{8}{9\times 3})\times 3=\frac{5}{3}\times 3+\frac{8\times 3}{9\times 3}=5+\frac{8}{9}$, οὗτος δὲ εἶναι ὁ διαιρετέος.

Διαίρεσις διὰ κλάσματος.

166. Πρὸς ἐκτέλεσιν πάσης διαιρέσεως, *ὅταν ὁ διαιρέτης δὲν εἶναι ἀκέραιος τρέπομεν αὐτὸν εἰς ἀκέραιον.* Τοῦτο ἐπιτυγχάνομεν στηριζόμενοι ἐπὶ τῆς προτάσεως § 125, καθ' ἥν, ἐὰν διαιρετέον καὶ διαιρέτην πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν ἴδιον ἀριθμόν, ἡ ἀξία τοῦ πηλίκου δὲν μεταβάλλεται.

Παραδείγματα.

1ον. Ἔστω πρὸς ἐκτέλεσιν ἡ διαίρεσις $5 : \frac{4}{7}$, καθ' ἣν μόνον ὁ διαιρέτης εἶναι κλάσμα.

Ἵνα καταστήσωμεν τὸν διαιρέτην ἀκέραιον χωρὶς νὰ βλαφθῇ τὸ πηλίκον, πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρετέον 5 καὶ τὸν διαιρέτην $\frac{4}{7}$ ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ διαιρέτου, δηλ. ἐπὶ 7. Οὕτω ἀντὶ $5 : \frac{4}{7}$ θὰ ἔχωμεν $5 \times 7 : \frac{4}{7} \times 7$, ἤτοι $5 \times 7 : 4$ ὅπερ γράφεται $\frac{5 \times 7}{4}$ ὅθεν

$$5 : \frac{4}{7} = \frac{5 \times 7}{4}.$$

2ον. Ἔστωσαν ἤδη ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης κλάσματα, ὡς εἰς τὴν διαίρεσιν $\frac{5}{8} : \frac{4}{3}$. Πολλαπλασιάζοντες τὸν διαιρετέον $\frac{5}{8}$ καὶ τὸν διαιρέτην $\frac{4}{3}$ ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ διαιρέτου, δηλ. ἐπὶ 3 θὰ ἔχωμεν ἀντὶ $\frac{5}{8} : \frac{4}{3}$ τὴν ἰσοδύναμον διαίρεσιν $\frac{5 \times 3}{8} : \frac{4}{3} \times 3$ ἢ $\frac{4 \times 3}{8} : 4$, ὅπερ εἶναι ἴσον πρὸς $\frac{4 \times 3}{8 \times 4}$ ὅθεν :

$$\frac{5}{8} : \frac{4}{3} = \frac{4 \times 3}{8 \times 4}.$$

Ἐκ τῶν παραδειγμάτων τούτων συνάγομεν ὅτι:

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν διὰ κλάσματος ἀντιστρέφομεν τοὺς ὅρους τοῦ διαιρέτου καὶ ἐκτελοῦμεν πολλαπλασιασμόν.

Διαίρεσις μικτῶν.

167. *Ὅταν ὁ διαιρετέος ἢ ὁ διαιρέτης ἢ καὶ ἀμφότεροι εἶναι μικτοί, τρέπομεν αὐτοὺς εἰς κλασματικοὺς καὶ οὕτω θὰ ἔχωμεν μίαν τῶν προηγουμένων διαιρέσεων.*

Παραδείγματα.

1ον. *Ἔστω ὁ διαιρετέος μικτὸς* $3\frac{4}{7} : \frac{5}{6}$. Τρέποντες τὸν διαιρετέον εἰς κλάσμα θὰ ἔχωμεν

$$\frac{25}{7} : \frac{5}{6} = \frac{25 \times 6}{7} : 5 = \frac{25 \times 6}{7 \times 5}.$$

2ον. *Ἔστω ὁ διαιρέτης μικτός·* οἷον $\frac{4}{7} : 3\frac{5}{6}$. Τρέποντες τὸν διαιρέτην εἰς κλάσμα θὰ ἔχωμεν τὴν διαίρεσιν $\frac{4}{7} : \frac{23}{6}$, ἥτις εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $\frac{4 \times 6}{7} : 23 = \frac{4 \times 6}{7 \times 23}$.

3ον Ἔστωσαν ἤδη *ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης μικτοί*, ὡς εἰς τὴν διαίρεσιν $2\frac{1}{3} : 4\frac{2}{5}$· τρέποντες ἀμφοτέρους εἰς κλάσματα θὰ ἔχωμεν $\frac{7}{3} : \frac{22}{5}$ καὶ ἐκ ταύτης τὴν $\frac{7\times5}{3} : 2$, ὅπερ γράφεται $\frac{7\times5}{3\times22}$ ὅθεν

$$2\frac{1}{3} : 4\frac{2}{5} = \frac{7\times5}{3\times22}.$$

168. Προσθήκη. Εἰς τ' ἀνωτέρω καταντῶμεν καὶ ἐὰν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν, ὅτι *τὸ πηλίκον δύο ἀριθμῶν γράφεται ὡς κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὸν διαιρετέον, παρονομαστὴν δὲ τὸν διαιρέτην*, καὶ κάμωμεν τὰς ἀπαιτουμένας ἁπλοποιήσεις· οὕτω πηλίκον τῆς διαιρέσεως $\frac{3}{4} : \frac{5}{7}$ εἶναι τὸ κλάσμα $\frac{\left(\frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{5}{7}\right)}$. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο κλασματικοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος τούτου ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν 4×7, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\left(\frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{5}{7}\right)} = \frac{\left(\frac{3\times4\times7}{4}\right)}{\left(\frac{5\times4\times7}{7}\right)} = \frac{3\times7}{4\times5}, \text{ ὅθεν } \frac{3}{4} : \frac{5}{7} = \frac{3\times7}{4\times5}.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι $3 : \frac{5}{6} = \frac{3}{\left(\frac{5}{6}\right)} = \frac{3\times6}{\left(\frac{5\times6}{6}\right)} = \frac{3\times6}{5}$.

Γενικὴ περίπτωσις.

169. *Ὅλαι αἱ ἀνωτέρω περιπτώσεις ἀνάγονται εἰς μίαν, καθ' ἣν ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν δύο κλάσματα. Τοῦτο κατορθοῦται, ἐάν, ὅταν ἔχωμεν μικτούς, τρέπωμεν τούτους εἰς κλάσματα, ὅταν δὲ ἀκεραίους, ἢ τὸν διαιρετέον ἢ τὸν διαιρέτην, γράφομεν τούτους ὡς κλάσματα ἔχοντα παρονομαστὴν τὴν μονάδα.* Οὕτως ἐκτελοῦμεν εὐκόλως πᾶσαν διαίρεσιν.

Παραδείγματα.

1) $\frac{3}{4} : 5 = \frac{3}{4} : \frac{5}{1} = \frac{3}{4}\times\frac{1}{5} = \frac{3}{20}.$

2) $5 : \frac{6}{7} = \frac{5}{1} : \frac{6}{7} = \frac{5}{1}\times\frac{7}{6} = \frac{5\times7}{6} = \frac{35}{6} = 5\frac{5}{6}.$

3) $3\frac{4}{5} : 2 = \frac{19}{5} : \frac{2}{1} = \frac{19}{5}\times\frac{1}{2} = \frac{19}{5\times2} = 1\frac{9}{10}.$

4) $4 : 2\frac{1}{4} = \frac{4}{1} : \frac{9}{4} = \frac{4}{1}\times\frac{4}{9} = \frac{16}{9} = 1\frac{7}{9}.$

Ἀσκήσεις.

Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑξῆς διαιρέσεις:

$3 : 6\frac{1}{2} = ;\quad 7\frac{1}{3} : 5 = ;\quad 5\frac{1}{4} : 3\frac{2}{3} = ;\quad 4\frac{1}{5} : \frac{2}{5} = ;$

$\frac{1}{4} : 3\frac{1}{5} = ;\quad \frac{1}{10} : \frac{3}{100} = ;\quad 1 : \frac{2}{10} = ;\quad \frac{5}{7} : \frac{12}{3} = ;$

$1\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = ;\quad 6\frac{1}{4} : \frac{1}{100} = ;$

Ποσόν. Διάφοροι μονάδες. Μέτρησις τοῦ ποσοῦ.

170. *Ποσὸν λέγεται πᾶν ὅ,τι ἐπιδέχεται αὔξησιν καὶ ἐλάττωσιν.* Τὸ ποσὸν ὅταν ἀποτελῆται ἀπὸ διακεκριμένας μονάδας ὀνομάζεται ἰδιαιτέρως *πλῆθος*· π. χ. πλῆθος ἀνθρώπων, προβάτων, δένδρων κτλ. Ὅταν δὲ εἶναι συνεχές τι, λέγεται *μέγεθος*· τὸ μέγεθος γραμμῆς τινος, οἷον νήματος, ταινίας κτλ. τὸ μέγεθος ἐπιφανείας, οἷον φύλλου χάρτου, τοῦ πίνακος ἀγροῦ ἢ οἰκοπέδου, τὸ μέγεθος στερεοῦ σώματος, οἷον τῆς κιμωλίας, τοῦ πορτοκαλίου κτλ. ἡ ἔκτασις τοῦ δωματίου, τὰ διάφορα ὑγρά, τὸ βάρος τῶν σωμάτων, ἡ ἰσχύς, μεθ' ἧς ἕλκομεν ἢ ἀπωθοῦμέν τι, μεθ' ἧς ἡ ἀτμάμαξα σιδηροδρόμου ἕλκει τὰς ἁμάξας κτλ.

171. Εἴδομεν ἐν τῇ εἰσαγωγῇ, πῶς προσδιορίζομεν ἕκαστον πλῆθος καὶ εὑρίσκομεν τὸν ἀριθμόν, ὅστις παριστᾷ αὐτό, δηλ. εἴδομεν τίνι τρόπῳ ἀριθμοῦμεν τὰς μονάδας, ἐκ τῶν ὁποίων ἀποτελεῖται πλῆθός τι. Μένει νὰ ἴδωμεν τίνι τρόπῳ προσδιορίζομεν ἕκαστον μέγεθος.

Ἐὰν παραθέσωμεν νῆμά τι ἢ ταινίαν, φύλλον χάρτου καὶ μελανοδοχεῖον, εἶναι φανερόν, ὅτι ἄλλου εἴδους εἶναι τὸ μέγεθος ἢ ἡ ἔκτασις τοῦ νήματος, ἄλλου εἴδους ἡ ἔκτασις τοῦ φύλλου τοῦ χάρτου καὶ ἄλλου εἴδους ἡ τοῦ μελανοδοχείου. Ἐὰν δὲ ἐρωτηθῶμεν ποῖον εἶναι τὸ μεγαλείτερον, εἶναι ἀδύνατον νὰ ἀπαντήσωμεν· ἐνῷ, ἂν παραθέσωμεν τὸ μολυβδοκόνδυλον πρὸς τὸν πῆχυν, ἀμέσως λέγομεν, ὅτι ὁ πῆχυς εἶναι μεγαλείτερος· ἂν παραθέσωμεν τὸ νῆμα ἢ τὴν ταινίαν πρὸς τὸν πῆχυν, λέγομεν, ὅτι τὸ νῆμα εἶναι μεγαλείτερον ἢ μικρότερον τοῦ πήχεως.

Ἐκ τούτου γίνεται φανερὸν ὅτι, *ἵνα συγκρίνωμεν μεγέθη, πρέπει ταῦτα νὰ εἶναι ὅμοια.*

172. Διὰ νὰ προσδιορίσωμεν λοιπὸν μέγεθός τι, λαμβάνομεν ὁμοειδὲς μέγεθος ἐντελῶς γνωστὸν καὶ ὡρισμένον, τὸ ὁποῖον θεωροῦμεν ὡς μονάδα, καὶ παρατηροῦμεν πόσας φορὰς εἰσέρχεται ἡ μονὰς αὕτη ἢ μέρος τι αὐτῆς εἰς τὸ δοθὲν μέγεθος. Μετὰ ταῦτα σχηματίζομεν ἀριθμὸν ἐκ τῆς ἀριθμητικῆς μονάδος ἢ ἁπλοῦ τινος μέρους αὐτῆς κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον. Π. χ. ἐὰν ἔχωμεν νῆμά τι καὶ θέλωμεν νὰ προσδιορίσωμεν τὸ μέγεθος αὐτοῦ. λαμβάνομεν τὸν πῆχυν καὶ εὑρίσκομεν ἀπὸ πόσους πήχεις καὶ ἀπὸ πόσα μέρη τοῦ πήχεως ἀποτελεῖται τὸ νῆμα. Ἐὰν ὁ πῆχυς εἰσέρχηται εἰς τὸ νῆμα τέσσαρας φορὰς καὶ μένῃ ἓν τεμάχιον νήματος μικρότερον τοῦ πήχεως. τότε χωρίζομεν αὐτὸν εἰς ἴσα μέρη, εἰς δύο ἢ τρία κτλ., μέχρις ὅτου εὕρωμεν μέρος τι αὐτοῦ, ἔστω τὸ $\frac{1}{3}$, μικρότερον τοῦ ἀπομείναντος μέρους τοῦ νήματος, εἰς τὸ ὁποῖον ἔστω ὅτι τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ πήχεως, εἰσέρχεται δύο φοράς. Ἐὰν καὶ πάλιν ἀπέμεινε μέρος τι, χωρίζομεν ἐκ νέου τὸν πῆχυν εἰς ἄλλα μικρότερα ἴσα μέρη, λ. χ. εἰς 12, καὶ βλέπομεν ποσάκις τὸ ἓν τούτων εἰσέρχεται εἰς τὸ ἀπομεῖναν μέρος τοῦ νήματος· ἔστω δὲ ὅτι εἰσέρχεται πέντε φορὰς ἀκριβῶς.

Τότε ὁ ἀριθμός, ὅστις θὰ παριστᾷ τὸ μέγεθος τοῦ νήματος, θὰ περιέχῃ τὴν ἀριθμητικὴν μονάδα 1 τέσσαρας φοράς. τὸ $\frac{1}{3}$ αὐτῆς δύο φορὰς καὶ τὸ $\frac{1}{12}$ πεντάκις, ἄρα θὰ εἶναι ὁ $4 + \frac{2}{3} + \frac{5}{12}$.

Ἐὰν ἡ μονὰς εἰσέρχηται εἰς τὸ μετρούμενον μέγεθος ἀκριβῶς ὀκτὼ φοράς, τὸ μέγεθος παρίσταται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 8· ἐὰν δὲ τὸ ἑκατοστὸν τῆς μονάδος εἰσέρχηται 15 φοράς, τὸ μέγεθος παρίσταται διὰ τοῦ $\frac{15}{100}$.

Ἡ τοιαύτη σύγκρισις τοῦ δοθέντος ποσοῦ πρὸς τὴν μονάδα καὶ τὰ μέρη αὐτῆς λέγεται *μέτρησις*· ἄρα

Μέτρησις λέγεται ἡ πρᾶξις, δι' ἧς, δοθέντος μεγέθους τινός, εὑρίσκομεν ἀριθμὸν ἐκ τῆς ἀριθμητικῆς μονάδος καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτῆς, ὅπως τὸ δοθὲν μέγεθος γίνεται ἐκ τῆς μονάδος τοῦ μεγέθους καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτῆς.

Ἐὰν μετρήσωμεν γραμμήν τινα, ὁ ἀριθμός, τὸν ὁποῖον εὑρίσκομεν, λέγεται *μῆκος* τῆς γραμμῆς. Ἐὰν δὲ ἐπιφάνειαν, οἷον πίνακα, οἰκόπεδον, ἀγρόν, ὁ ἀριθμὸς τότε λέγεται *ἐμβαδὸν* τῆς ἐπιφανείας· ἐὰν δὲ ἔχωμεν ὄγκον ἢ χῶρόν τινα, οἷον τὸν ὄγκον ὕδατος, τὸν χῶρον δεξαμενῆς, δωματίου κτλ., ὁ ἀριθμὸς λέγεται *ὄγκος* ἢ *χωρητικότης*.

Ἐν γένει ὁ ἀριθμός, τὸν ὁποῖον εὑρίσκομεν ἐκ τῆς μετρήσεως ποσοῦ τινος, λέγεται *τιμὴ* τοῦ ποσοῦ.

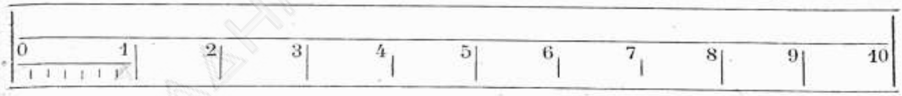
Δύο συγκεκριμένους ἀριθμοὺς λέγομεν *ὁμωνύμους*, ὅταν προέρχωνται ἐκ μετρήσεων διαφόρων μερῶν τοῦ αὐτοῦ πράγματος διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος· οἷον 3 ὀκ. ἀλεύρου καὶ 8 ὀκ. ἀλεύρου.

Γραμμικαὶ μονάδες.

173. Αἱ κυριώτεραι μονάδες πρὸς μέτρησιν τῶν γραμμικῶν μεγεθῶν εἶναι ὁ *πῆχυς ἐνδεζὲ* καὶ ὁ *ἀρσίν*, τὸ *γαλλικὸν μέτρον*, ὁ *τεκτονικὸς πῆχυς*, ἡ *ὑάρδα*, τὴν ὁποίαν μεταχειρίζονται οἱ Ἄγγλοι, καὶ ὁ *ρωσσικὸς ἀρσίν*.

Ἑκάστη τῶν μονάδων τούτων διαιρεῖται εἰς ὡρισμένον ἀριθμὸν ἴσων μερῶν. Οὕτω :

Τὸ μέτρον διαιρεῖται εἰς 10 μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται *παλάμαι* ἢ *δέκατα τοῦ μέτρου*. Μία παλάμη ἔχει τὸ μέγεθος ἀκριβῶς ἑνὸς



στίχου τοῦ παρόντος ἔργου καὶ διαιρεῖται εἰς ἄλλα 10 μικρότερα, τὰ ὁποῖα λέγονται *δάκτυλοι* ἢ ἑκατοστὰ τοῦ μέτρου ἢ κοινῶς *πόντοι*. Ὥστε τὸ γαλλικὸν μέτρον διαιρεῖται εἰς 100 δακτύλους· ἕκαστος δάκτυλος διαιρεῖται εἰς 10 μέρη, ἅτινα λέγονται *γραμμαὶ* ἢ *χιλιοστὰ* τοῦ μέτρου. Ὁ πῆχυς (ἐνδεζὲ) καὶ ὁ ἀρσὶν διαιροῦνται ἑκάτερος εἰς 8 ἴσα μέρη, τὰ *ρούπια*. Ἰσοδυναμοῦσι δὲ ὁ μὲν ἐνδεζὲ πρὸς 65 περίπου δακτύλους τοῦ μέτρου, ὁ δὲ ἀρσὶν πρὸς 67 δακτ. περίπου. Ὁ ρωσσικὸς πῆχυς ἰσοδυναμεῖ πρὸς 71 δακτύλους τοῦ μέτρου.

Ὁ τεκτονικὸς πῆχυς διαιρεῖται εἰς 24 μέρη, *δακτύλους* ἢ κοινῶς *παρμάκια* λεγόμενα, περιέχει δὲ 75 δακτύλους τοῦ μέτρου, ἐπομένως εἶναι τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ μέτρου.

Ἡ ὑάρδα διαιρεῖται εἰς 3 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται *ἀγγλικοὶ πόδες*· ἕκαστος ἀγγλικὸς ποὺς διαιρεῖται πάλιν εἰς 12 ἄλλα μέρη, τοὺς *ἀγγλικοὺς δακτύλους* (ἴντσες)· ὥστε ἡ ὑάρδα ἔχει 36 ἀγγλικοὺς δακτύλους, ἰσοδυναμεῖ δὲ πρὸς 91 περίπου δακτύλους τοῦ μέτρου.

Πρὸς μέτρησιν μεγάλων ἀποστάσεων συνήθως λαμβάνεται τὸ *χιλιόμετρον*, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπὸ 1.000 μέτρα.

Ἄλλαι μονάδες διὰ μεγάλας ἀποστάσεις εἶναι:

Ἡ *λεῦγα*, ἥτις ἀποτελεῖται ἀπὸ 40.000 μέτρα.

Τὸ *γεωγραφικὸν γερμανικὸν μίλιον* εἶναι 7422 μέτρα.

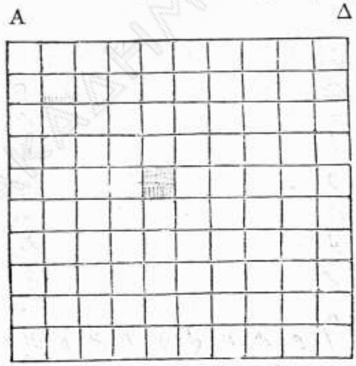
Τὸ *ἀγγλικὸν μίλιον* 1760 ὑάρδαι ἢ 1609 μέτρα.

Τὸ *ναυτικὸν μίλιον* 1852 μέτρα, ἤτοι τὸ $\frac{1}{4}$ περίπου τοῦ γεωγραφικοῦ μιλίου.

Τὸ *ρωσσικὸν μίλιον* ἢ *βέρστιον* 1500 ἀρσὶν ρωσσικοὶ ἢ 1067 μέτρα.

Μονάδες ἐπιφανειῶν.

174. Ὡς μονάδα πρὸς μέτρησιν τῶν ἐπιφανειῶν λαμβάνουσι τετράγωνον Α Β Γ Δ, τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλευρά, ὡς ἡ ΑΒ, ἡ ΒΓ, εἶναι ἓν μέτρον.



Τὸ τετράγωνον τοῦτο καλεῖται *τετραγωνικὸν μέτρον* καὶ διαιρεῖται εἰς ἑκατὸν ἴσα μέρη, ὡς φαίνεται ἐν τῷ σχήματι. Τὰ μέρη ταῦτα λέγονται *τετραγωνικαὶ παλάμαι*. Ἑκάστη τετραγ. παλάμη ἔχει ἔκτασιν, ὅσην κατέχουσιν ἀκριβῶς 21 πλήρεις στίχοι μιᾶς σελίδος τοῦ παρόντος ἔργου καὶ διαιρεῖται ὁμοίως εἰς 100 ἴσα μέρη, τοὺς *τετραγωνικοὺς δακτύλους*. Ὥστε τὸ τετραγ. μέτρον περιέχει 10 000 τετραγων. δακτύλους.

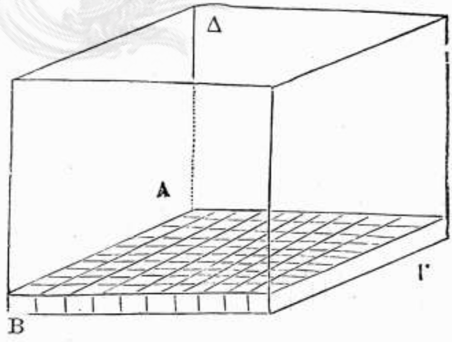
Ἄλλη μονὰς πρὸς μέτρησιν ἐπιφανειῶν εἶναι ὁ *τετραγωνικὸς τεκτονικὸς πῆχυς*, ὅστις εἶναι τετράγωνον ἔχον πλευρὰν ἕνα τεκτονικὸν πῆχυν. Εἶναι δὲ ὁ τετραγ. τεκτον. πῆχυς τὰ $\frac{9}{16}$ τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου.

Ἄλλη μονὰς πρὸς μέτρησιν μεγαλειτέρων ἐπιφανειῶν εἶναι τὸ *νέον στρέμμα*, τὸ ὁποῖον σύγκειται ἐκ 1 000 τετραγωνικῶν μέτρων καὶ τὸ *παλαιὸν στρέμμα*, ὅπερ ἀποτελεῖται ἐκ 1 270 τετραγωνικῶν μέτρων.

Τὸ *ἄρ* περιέχει 100 τετρ. μέτρα καὶ τὸ *ἑκτάριον* περιέχει 100 ἄρ ἢ 10 000 τετρ. μέτρα.

Μονάδες χωρητικότητος

175. Πρὸς μέτρησιν τοῦ ὄγκου ἢ τῆς χωρητικότητος τῶν σωμάτων λαμβάνομεν ὡς μονάδα τὸ *κυβικὸν μέτρον*, ὅπερ εἶναι κύβος ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλευρά, ὡς ἡ ΑΒ, εἶναι ἓν μέτρον.



Μέρη αὐτοῦ εἶναι ἡ *κυβικὴ παλάμη* ἢ *λίτρα*, ἥτις εἶναι κύβος ἔχων πλευρὰν μίαν παλάμην, καὶ ὁ *κυβικὸς δάκτυλος*, ὅστις εἶναι κύβος ἔχων πλευρὰν ἕνα δάκτυλον. Τὸ κυβικὸν μέτρον ἔχει 1000 λίτρας, ἡ δὲ λίτρα ἔχει 1000 κυβικοὺς δακτύλους. Διὰ τοὺς δημητριακοὺς καρποὺς μεταχειρίζονται τὸ *κοιλόν*, ὅπερ εἶναι κιβώτιον περιέχον 100 λίτρας, δι' ὃ καὶ *ἑκατόλιτρον* λέγεται.

Μονάδες βάρους.

176. Ἐὰν ἕνα κυβικὸν δάκτυλον πληρώσωμεν ὕδατος ἀπεσταγμένου καὶ θερμοκρασίας 4 βαθμῶν, τὸ βάρος τοῦ ὕδατος λαμβάνεται ὡς μονὰς καὶ λέγεται *γραμμάριον* ἢ *δραχμή*. Χίλια γραμμάρια ἀποτελοῦσι τὸ *χιλιόγραμμον*. Τὸ χιλιόγραμμον εἶναι τὸ βάρος τοῦ ὕδατος, τὸ ὁποῖον χωρεῖ μία λίτρα.

Χίλια χιλιόγραμμα ἀποτελοῦσι τὸν *τόννον*.

Ὁ τόννος εἶναι τὸ βάρος τοῦ ὕδατος, τὸ ὁποῖον χωρεῖ ἓν κυβικὸν μέτρον. Οἱ Γερμανοὶ μεταχειρίζονται ἐκτὸς τοῦ ἀνωτέρω τὸ *φούντιον*, ὅπερ ἔχει βάρος 500 γραμμαρίων ἤτοι $\frac{1}{2}$ τοῦ χιλιογράμμου.

Ἐν Τουρκίᾳ καὶ Ἑλλάδι μονὰς βάρους εἶναι ἡ *ὀκά*, ἥτις διαιρεῖται εἰς 400 μέρη, ἕκαστον τῶν ὁποίων λέγεται *δράμιον*.

Ὁ *στατήρ*, ὅστις ἀποτελεῖται ἀπὸ 44 ὀκάδας.

Μία ὀκὰ ἰσοδυναμεῖ πρὸς 1280 γραμμάρια.

Ἓν χιλιόγραμμον ὕδατος ἰσοδυναμεῖ πρὸς $312\frac{1}{2}$ δράμια.

Ἐν Ἑλλάδι διὰ τὴν κορινθιακὴν σταφίδα μεταχειρίζονται τὴν *Ἐνετικὴν λίτραν*, ἥτις ἰσοδυναμεῖ πρὸς 447 γραμμάρια, ἤτοι 149 δράμια.

Οἱ ἰατροὶ καὶ φαρμακοποιοὶ μεταχειρίζονται ὡς μονάδα βάρος 360 γραμμαρίων, ὅπερ λέγεται παρ' αὐτοῖς *λιτρα*. Ἡ λίτρα αὕτη διαιρεῖται εἰς 12 *οὐγγίας*. Μία οὐγγία εἰς 8 *δραχμάς*. Μία δραχμὴ εἰς 3 *σκρούπουλα*, καὶ τὸ σκρούπουλον εἰς 20 *κόκκους*. 50 κόκκοι ἰσοδυναμοῦσι πρὸς ἓν δράμιον.

Παρατήρησις. Πρὸς μέτρησιν τῶν ὑγρῶν μεταχειρίζονται δοχεῖον, ὅπερ χωρεῖ ὑγρὸν βάρους μιᾶς ὀκᾶς καὶ λέγεται διὰ τοῦτο *ὀκά*· ἔχει δὲ τὸ δοχεῖον τοῦτο διάφορα μεγέθη κατὰ τὸ ὑγρόν, τὸ ὁποῖον πρόκειται νὰ μετρηθῇ· π. χ. ὅταν πρόκηται νὰ μετρήσωμεν ἔλαιον, ὅπερ εἶναι ἐλαφρότερον τοῦ ὕδατος, μεταχειριζόμεθα ὀκᾶν μεγαλειτέραν, ὅταν δὲ οἶνον, μικροτέραν.

Ἐν Μιτυλήνῃ καὶ Κυδωνίαις πρὸς μέτρησιν τοῦ ἐλαίου μεταχειρίζονται τὸ *λαγύνιον*. Ἓν λαγύνιον ἔχει $6\frac{1}{4}$ ὀκάδας.

Ἐν Ἀδραμυτείῳ πρὸς μέτρησιν τοῦ ἐλαίου μεταχειρίζονται τὸ *ἀγιάριον*, τὸ ὁποῖον ἰσοδυναμεῖ πρὸς $9\frac{1}{4}$ ὀκάδας. Εὐκόλως δὲ εὑρίσκομεν, ὅτι 50 ἀγιάρια ἰσοδυναμοῦσι πρὸς 74 λαγύνια.

Μονάδες χρόνου.

177. *Μονὰς* πρὸς μέτρησιν τοῦ χρόνου λαμβάνεται ὁ χρόνος ἀπὸ τοῦ ἑνὸς μεσονυκτίου μέχρι τοῦ ἀμέσως ἑπομένου καὶ λέγεται *ἡμερονύκτιον* ἢ ἁπλῶς ἡμέρα. Περὶ τῶν ὑποδιαιρέσεων τῆς ἡμέρας εἴδομεν ἐν σελ. 43ῃ προβλ. 15ῳ.

Πρὸς μέτρησιν μεγάλων χρονικῶν διαστημάτων ὡς μονὰς λαμβάνεται τὸ *ἔτος*. Τρία κατὰ σειρὰν ἔτη λέγονται *κοινὰ* καὶ λαμβάνεται ἕκαστον μὲ 365, τὸ δὲ τέταρτον μὲ 366 ἡμέρας. Τὸ ἔτος τοῦτο λέγεται *δίσεκτον* ἢ *ἐμβόλιμον*. Δίσεκτα ἔτη εἶναι τὰ παριστάμενα δι' ἀριθμοῦ διαιρουμένου διὰ τοῦ 4, οἷον τὸ 1900, 1904, 1908, 1912 . . .

Τὸ ἔτος διαιρεῖται εἰς 12 μῆνας, τῶν ὁποίων τινὲς μὲν ἔχουν 30 ἡμέρας, ἄλλοι δὲ 31. Ὁ Φεβρουάριος, ὅταν τὸ ἔτος εἶναι κοινόν, ἔχει 28 ἡμέρας, ὅταν ὅμως εἶναι ἐμβόλιμον, ἔχει 29.

Ὡς χρονικὴ μονὰς λαμβάνεται καὶ ὁ *αἰὼν* ἢ *ἑκατονταετηρίς*, ἀποτελουμένη ἀπὸ 100 ἔτη.

Προβλήματα. Πόσους μῆνας ἔχει ὁ αἰών; Πόσας ὥρας ἔχει τὸ ἔτος; πόσας ἡμέρας; πόσα πρῶτα λεπτά; πόσα δεύτερα; Ὁ μὴν πόσας ὥρας ἔχει; Τί μέρος τοῦ ἔτους εἶναι ἡ ἡμέρα; Ποῖον μέρος τοῦ ἔτους εἶναι τὸ πρῶτον λεπτόν, ποῖον δὲ τῆς ὥρας καὶ ποῖον τῆς ἡμέρας;

Διαίρεσις τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου.

178. Περὶ τῶν ὑποδιαιρέσεων τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου εἴδομεν ἐν σελ 43ῃ προβλ. 16ῳ.

Πρόβλημα. Πόσα πρῶτα λεπτὰ καὶ πόσα δεύτερα λεπτὰ ἔχει ἡ περιφέρεια; Ποῖον μέρος τῆς περιφερείας εἶναι τὸ πρῶτον λεπτὸν καὶ ποῖον τὸ δεύτερον;

Ποσὰ ἀνάλογα.

179. Ὑπάρχουσι ποσά, τὰ ὁποῖα συνδέονται πρὸς ἄλληλα οὕτως, ὥστε ἡ μεταβολὴ τοῦ ἑνὸς ἐπιφέρει καὶ τὴν μεταβολὴν τοῦ ἄλλου. Π. χ. 5 πήχ. ὑφάσματος ἀξίζουν 8 γρόσ., οἱ 7 πήχ. εἶναι φανερὸν ὅτι θὰ ἀξίζουν περισσότερον καὶ οἱ 15 ἀκόμη περισσότερον,

Δύο ποσὰ λέγονται ἀνάλογα, ἐὰν συνδέωνται οὕτως, ὥστε πολλαπλασιαζομένου τοῦ ἑνὸς ἐπί τινα ἀριθμὸν νὰ πολλαπλασιάζηται καὶ τὸ ἄλλο ἐπὶ τὸν ἴδιον ἀριθμόν, καὶ διαιρουμένου τοῦ ἑνὸς νὰ διαιρῆται καὶ τὸ ἄλλο διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

Εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα παρατηροῦμεν, ὅτι, ἐὰν διπλασιασθῶσιν οἱ 5 πήχεις καὶ γίνουν 10, τότε θὰ διπλασιασθῇ καὶ ἡ ἀξία των καὶ θὰ γίνῃ 16 γρόσια. Ἐὰν δὲ τριπλασιασθῶσιν οἱ πήχεις καὶ γίνουν 15, τότε θὰ τριπλασιασθῇ καὶ ἡ ἀξία αὐτῶν καὶ θὰ γίνῃ 24 καὶ καθ' ἑξῆς.

Οἱ πήχεις λοιπὸν καὶ τὰ γρόσια εἶναι ποσὰ ἀνάλογα.

Ὁμοίως, ἐὰν 5 ἄνθρωποι χρειάζωνται διὰ τροφὴν 20 γρόσ., διπλάσιοι, ἤτοι 10 ἄνθρωποι θὰ χρειάζωνται διπλάσια, ἤτοι 40 γρόσια, καὶ τριπλάσιοι ἄνθρωποι τριπλάσια γρόσια.

Ὁ ἀριθμὸς λοιπὸν τῶν ἀνθρώπων καὶ τὰ δαπανώμενα πρὸς διατροφὴν αὐτῶν γρόσια εἶναι ποσὰ ἀνάλογα.

Σημ. Ὑπάρχουσι ποσά, τὰ ὁποῖα συναυξάνουσι, χωρὶς νὰ εἶναι ἀνάλογα. Οὕτως ἡ ἡλικία τοῦ παιδὸς καὶ τὸ ἀνάστημα αὐτοῦ· ὁ χρόνος, τὸν ὁποῖον χρειάζονται οἱ ἵπποι διὰ νὰ σύρωσιν ἅμαξαν ἀπὸ ἑνὸς μέρους εἰς τὸ ἄλλο καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἵππων κτλ.

Ποσὰ ἀντίστροφα.

180. *Δύο ποσὰ λέγονται ἀντιστρόφως ἀνάλογα ἢ ἀντίστροφα, ἂν μεταβάλλωνται οὕτως, ὥστε πολλαπλασιαζομένου τοῦ ἑνὸς ἐπί τινα ἀριθμόν, τὸ ἕτερον νὰ διαιρῆται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, καὶ διαιρουμένου τοῦ πρώτου, τὸ δεύτερον νὰ πολλαπλασιάζηται.*

Διὰ νὰ διακρίνωμεν δύο τοιαῦτα ποσά, δοκιμάζομεν μόνον μὲ τὸ 2 καὶ μὲ τὸ 3, δηλ. διπλασιάζομεν τὸ ἓν καὶ ἂν τὸ ἄλλο διαιρεθῇ διὰ 2, καὶ ἀφοῦ τριπλασιάσωμεν τὸ πρῶτον, ἂν τὸ δεύτερον διαιρεθῇ διὰ τρία, τότε τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα.

Παράδειγμα. 40 ἄνθρωποι ἐκτελοῦσιν ἔργον εἰς 30 ἡμέρας, 20 ἄνθρωποι εἶναι φανερὸν ὅτι θὰ ἐκτελέσωσι τὸ αὐτὸ ἔργον εἰς 60 ἡμέρας καὶ 80 ἄνθρωποι τὸ αὐτὸ ἔργον θὰ ἐκτελέσωσιν εἰς 15 ἡμέρας. Ὅθεν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀνθρώπων καὶ ὁ χρόνος ὁ ἀπαιτούμενος πρὸς ἐκτέλεσιν τοῦ ἔργου εἶναι ποσὰ ἀντίστροφα.

181. *Μέθοδος λέγεται τρόπος τις γενικός, διὰ τοῦ ὁποίου λύομεν εἶδός τι προβλημάτων.*

Προβλήματα.

Πρόβλημα 1). 5 πήχεις ὑφάσματος ἀξίζουν 8 γρόσια, 20 πήχεις πόσον ἀξίζουν; Ἐνταῦθα δίδονται δύο ποσὰ *πήχεις* καὶ *χρήματα*, ζητεῖται δὲ εἰς τοὺς 20 πήχεις πόσα χρήματα ἀντιστοιχοῦν.

Παριστῶμεν διὰ χ τὸν ἄγνωστον ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον ζητοῦμεν, καὶ διατάσσομεν τὸ πρόβλημα ὡς ἑξῆς,

5 πήχεις ἀξίζουν 8 γρόσια
20 » » χ »

Δηλ. ἐγράψαμεν εἰς μίαν σειρὰν τοὺς 5 πήχεις καὶ τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς τούτους 8 γρόσια, εἰς δευτέραν δὲ σειρὰν τοὺς 20 πήχεις καὶ τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς τούτους ἄγνωστα γρόσια οὕτως, ὥστε οἱ πήχεις νὰ εὑρίσκωνται ὑπὸ τοὺς πήχεις καὶ τὰ ζητούμενα χ γρόσια ὑπὸ τὰ γρόσια. Εἰς τὴν πρώτην στήλην ἐτέθησαν οἱ πήχεις, τῶν ὁποίων καὶ αἱ δύο τιμαὶ εἶναι γνωσταί, εἰς δὲ τὴν δευτέραν ἐτέθη τὸ ποσόν, τοῦ ὁποίου τὴν μίαν τιμὴν ζητοῦμεν.

Λύσις. Ἀφοῦ οἱ 5 πήχ. ἀξίζουν 8 γρόσ., πέντε φορὰς ὀλιγώτεροι πήχεις, ἤτοι εἷς πῆχυς, θὰ ἀξίζῃ 5 φορὰς ὀλιγώτερα τῶν 8 γροσίων, ἤτοι $\frac{8}{5}$ γρόσ. καὶ εἴκοσι φορὰς περισσότεροι πήχεις, ἤτοι 20 πήχεις, θὰ ἀξίζουν εἴκοσι φορὰς περισσότερα γρόσια, ἤτοι $\frac{8\times 20}{5}$ γρόσια, ἤτοι 32 γρόσια.

Διάταξις. Ἀφοῦ 5 πήχεις ἀξίζουν 8 γρόσια
ὁ 1 πῆχυς θὰ ἀξίζῃ $\frac{8}{5}$ »
καὶ οἱ 20 πήχεις » ἀξίζουν $\frac{8\times20}{5}$, ἄρα $\chi=32$ γρόσια.

Τὸ πρόβλημα τοῦτο λύομεν σκεπτόμενοι καὶ ὡς ἑξῆς: Ἐπειδὴ διπλάσιοι ἢ τριπλάσιοι πήχεις θὰ ἔχουν διπλάσια ἢ τριπλάσια γρόσια, τὰ ποσὰ ταῦτα εἶναι ἀνάλογα· ἄρα, ὅταν οἱ 5 πήχ. γίνουν 1 πῆχυς, δηλ. ἐὰν διαιρεθῶσι διὰ 5, καὶ τὰ 8 γρόσια θὰ διαιρεθῶσι διὰ 5 καὶ θὰ γίνουν $\frac{8}{5}$ γρόσ. Καὶ ὅταν πάλιν ὁ 1 πῆχυς γίνῃ 20 πήχεις, ἤτοι πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 20, τότε καὶ ἡ ἀξία αὐτοῦ, ἤτοι τὰ $\frac{8}{5}$ τοῦ γροσίου θὰ πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ 20 καὶ θὰ γίνουν $\frac{8\times20}{5}=32$, ὥστε οἱ 20 πήχεις θὰ ἔχουν 32 γρόσ. Ἡ διάταξις γίνεται ὡς ἀνωτέρω.

Πρόβλ. 2). 4 πήχεις ὑφάσματος ἀξίζουν 128 γρόσια. Πόσον ἀξίζουν 5 ρούπια;

Διάταξις τῶν δεδομένων:

4 πήχεις ἀξίζουν 128 γρόσια
5 ρούπια » χ »

Τὰς ἐν τῇ αὐτῇ στήλῃ δύο τιμὰς τοῦ ὑφάσματος, δηλ. 4 πήχ. καὶ 5 ρούπια, δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν εἰς ὁμωνύμους, δηλ. εἰς ἀριθμοὺς προερχομένους ἐκ τῆς αὐτῆς μονάδος. Ταύτην ἐκλέγομεν καταλλήλως εἰς ἕκαστον πρόβλημα. Ἐνταῦθα θὰ τρέψωμεν τοὺς 4 πήχ. εἰς 32 ρούπ. καὶ θὰ ἔχωμεν, ἐὰν διατάξωμεν τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος:

32 ρούπια ἀξίζουν 128 γρόσια,
5 » » χ »

Λύσις. Ἀφοῦ 32 ρούπια ἀξίζουν 128 γρόσια,
1 ρούπιον θὰ ἀξίζῃ $\frac{128}{32}$ »
καὶ τὰ 5 ρούπια θὰ ἀξίζουν $\frac{128\times5}{32}=20$ γρόσια.

Πρόβλ. 3) Ἐὰν δώσω 5 ὀκάδας σίτου, λαμβάνω 8 ὀκάδας κριθῆς. Ἐὰν δώσω 250 δράμια σίτου, πόσας ὀκάδας κριθῆς θὰ λάβω;

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο, ἐὰν διατάξωμεν τὰ δεδομένα οὕτως, ὥστε αἱ δύο τιμαὶ τοῦ αὐτοῦ πράγματος νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην, θὰ ἔχωμεν:

5 ὀκάδες σίτου ἀνταλλάσσονται μὲ 8 ὀκάδας κριθῆς,
250 δράμια » » » χ » »

Ἐὰν καὶ ἐνταῦθα τρέψωμεν τὰς 5 ὀκάδας εἰς δράμια, διὰ νὰ εὑρίσκωνται εἰς ἑκάστην στήλην ὁμώνυμοι ἀριθμοί, θὰ ἔχωμεν :

2 000 δράμια ἀνταλλάσσονται μὲ 8 ὀκάδας κριθῆς·
250 » » » χ » »

Λύσις. Ἀφοῦ μὲ 2 000 δράμ. σίτου λαμβάνω 8 ὀκάδ. κριθῆς,
» 1 » » θὰ λάβω $\frac{8}{2000}$ » »
καὶ » 250 » » » $\frac{8\times250}{2000}=1$ ὀκ. κριθ.

Πρόβλ. 4). Μὲ 60 γρόσια ἀγοράζει τις 5 ὀκάδας βουτύρου· μὲ 7 λίρας τουρκ. πόσας ὀκάδας θὰ ἀγοράσῃ ;

Διάταξις. Μὲ 60 γρόσια ἀγοράζει 5 ὀκάδας,
» 7 λίρας θὰ ἀγοράσῃ χ »

Οἱ ἐν τῇ πρώτῃ στήλῃ ἀριθμοὶ παριττῶσι καὶ οἱ δύο χρηματικὴν ἀξίαν, ἄρα τὸ αὐτὸ πρᾶγμα. Ἐὰν τρέψωμεν αὐτοὺς εἰς ὁμωνύμους διὰ τῆς τροπῆς τῶν 7 λιρῶν εἰς 756 γρόσ., θὰ ἔχωμεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα :

Μὲ 60 γρόσια ἀγοράζει τις 5 ὀκάδας,
» 756 » θὰ ἀγοράσῃ χ »

Λύσις. Ἀφοῦ μὲ 60 γρόσια ἀγοράζει τις 5 ὀκάδας,
» 1 γρόσιον θὰ ἀγοράσῃ $\frac{5}{60}$ »
καὶ » 756 γρόσια » » $\frac{5\times756}{60}=\frac{756}{12}=73$ ὀκ.

Πρόβλ. 5). Τίνος ἀριθμοῦ τὰ $\frac{3}{4}$ εἶναι ὁ ἀριθμὸς 48 ;

Ὁ ἀριθμὸς ὑποτίθεται διῃρημένος εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη καὶ εἶναι γνωστόν, ὅτι τὰ τρία μέρη περιέχουν 48 μονάδας, ἄρα:

Ἐὰν $\frac{3}{4}$ (μέρη) τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ ἔχουν 48 μονάδας,
τὰ $\frac{4}{4}$ » αὐτοῦ, ἤτοι ὁ ζητούμενος ἀριθμός, θὰ ἔχῃ χ μονάδας.

Λύσις. Ἀφοῦ τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ ἔχουν 48 μονάδας,
τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτοῦ θὰ ἔχῃ $\frac{48}{3}$
καὶ τὰ $\frac{4}{4}$ θὰ ἔχουν $\frac{48\times4}{3}=64$ μονάδας.

Εἰς τὰ τοιαῦτα προβλήματα τὰ μερίδια εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰς μονάδας, τὰς ὁποίας περιέχουν.

Πρόβλ. 6) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ $\frac{5}{6}$ τοῦ ἀριθμοῦ 300.

Ἐὰν τὸ ὅλον τοῦ ἀριθμοῦ παραστήσωμεν διὰ τοῦ 1 ἢ διὰ κλάσματος ἔχοντος ἴσους ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστήν, κατατάσσομεν τὰ δεδομένα οὕτως:

Ἐὰν τὰ $\frac{6}{6}$ (μέρη) τοῦ ἀριθμοῦ ἔχουν 300 μονάδας,
» $\frac{5}{6}$ » » » χ »

Λύσις. Ἐὰν τὸ ὅλον, ἤτοι τὰ $\frac{6}{6}$ τοῦ ἀριθμοῦ, ἔχῃ 300 μονάδας,
τὸ $\frac{1}{6}$ αὐτοῦ θὰ ἔχῃ $\frac{300}{6}=50$ μονάδας
καὶ τὰ $\frac{5}{6}$ » θὰ ἔχουν $50\times5=250$ μονάδας.

Ὁρισμός. Τὰ ἀνωτέρω προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα δίδονται δύο ποσὰ ἀνάλογα ἢ ἀντίστροφα καὶ αἱ ἀντιστοιχοῦσαι αὐτῶν τιμαί, ζητεῖται δὲ εἰς νέαν τιμὴν τοῦ πρώτου ποία τιμὴ τοῦ δευτέρου ἀντιστοιχεῖ, λέγονται *προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν.*

Πρόβλ. 7) 5 ἐργάται σκάπτουν ἄμπελον εἰς 36 ἡμέρας, 9 ἐργάται εἰς πόσας ἡμέρας θὰ σκάψουν τὴν αὐτὴν ἄμπελον;

Διάταξις. Οἱ 5 ἐργάται ἐργάζονται 36 ἡμέρας,
» 9 » » χ »

Ἐνταῦθα εἶναι φανερὸν ὅτι, ἂν οἱ ἐργάται διπλασιασθῶσι, θὰ σκάψωσι τὴν ἄμπελον εἰς τὸ ἥμισυ τῶν ἡμερῶν· καὶ ἂν οἱ ἐργάται τριπλασιασθῶσι, θὰ σκάψωσι τὴν ἄμπελον εἰς τὸ τρίτον τῶν ἡμερῶν. Οἱ ἐργάται λοιπὸν καὶ ὁ χρόνος, καθ' ὃν ἐκτελοῦσι τὸ ἔργον, εἶναι ποσὰ ἀντίστροφα.

Λύσις. Ἀφοῦ οἱ 5 ἐργάται χρειάζονται πρὸς ἐκτέλεσιν τοῦ ἔργου 36 ἡμ.
ὁ 1 ἐργάτης θὰ ἐργασθῇ » » 36×5 »
καὶ οἱ 9 ἐργάται θὰ ἐργασθῶσι » » $\frac{5\times36}{9}=20$ »

Ἐκ τῆς λύσεως τῶν ἀνωτέρω προβλημάτων συνάγομεν τὸν κανόνα:

Κανών. *Ἵνα λύσωμεν πρόβλημά τι τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα:*

Γράφομεν εἰς μίαν σειρὰν τοὺς δύο γνωστοὺς ἀντιστοιχοῦντας *ἀριθμοὺς καὶ ὑπὸ ἕκαστον τούτων τοὺς δύο ἄλλους ἀντιστοιχοῦντας, τῶν ὁποίων ὁ εἷς εἶναι ὁ ζητούμενος, οὕτως ὥστε ὑπὸ τὴν αὐτὴν στήλην νὰ εὑρίσκωνται τιμαὶ τοῦ αὐτοῦ πράγματος ἢ ποσοῦ καὶ εἰς τὴν πρώτην μάλιστα στήλην νὰ εἶναι καὶ αἱ δύο τιμαὶ γνωσταί. Μετὰ ταῦτα τρέπομεν τοὺς γεγραμμένους εἰς τὴν πρώτην στήλην, ἂν εἶναι συγκεκριμένοι, εἰς ὁμωνύμους. Τούτων πραχθέντων, εὑρίσκομεν εἰς τὴν μονάδα τοῦ πρώτου ποσοῦ ποία τιμὴ τοῦ δευτέρου ἀντιστοιχεῖ καὶ ἐκ ταύτης τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὸν ζητούμενον ἀριθμόν.*

Σημ. Εἰς τὰ προβλήματα τὰ ἔχοντα μικτοὺς τρέπομεν τοὺς μικτοὺς εἰς κλασματικοὺς πρὸς εὐκολίαν τῶν πράξεων.

Πρόβλ. 8). Ἀντήλλαξα $5\frac{2}{3}$ ὀκ. κρομμύων μὲ $8\frac{1}{4}$ ὀκ. σίτου. Πόσας ὀκάδας σίτου θὰ λάβω μὲ $7\frac{2}{5}$ ὀκ. κρομμύων;

Τρέποντες τοὺς μικτοὺς εἰς κλασματικοὺς καὶ διατάσσοντες θὰ ἔχωμεν:

$\frac{17}{3}$ ὀκ. κρομμ. ἀνταλλάσσω μὲ $\frac{33}{4}$ ὀκ. σίτου,
$\frac{37}{5}$ » » » » χ » »

Ἐὰν τρέψωμεν τὰ κλάσματα τῆς πρώτης στήλης εἰς ὁμώνυμα, θὰ ἔχωμεν:

$\frac{85}{15}$ ὀκ. κρομμ. ἀνταλλάσσω μὲ $\frac{33}{4}$ ὀκ. σίτου
$\frac{111}{15}$ » » » » χ » »

Λύσις. Ἀφοῦ $\frac{85}{15}$ ὀκ. κρομμ. ἀνταλλάσσω μὲ $\frac{33}{4}$ ὀκ. σίτου,
$\frac{1}{15}$ » » θὰ ἀνταλλάξω » $\frac{33}{4 \times 85}$ » »
καὶ $\frac{111}{15}$ ὀκ. κρομμ. θὰ ἀνταλλάξω μὲ $\frac{33 \times 111}{4 \times 85} = 10\,\frac{263}{340}$ ὀκ. σίτου.

Πρόβλ. 9). Μηχανὴ καίει εἰς $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας $3\frac{1}{2}$ ὀκ. πετρελαίου, Εἰς $\frac{2}{5}$ τῆς ὥρας πόσας ὀκάδας πετρελαίου θὰ καύσῃ;

Διάταξις: Εἰς $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας καίει $3\,\frac{1}{2}$ ὀκ.
« $\frac{2}{5}$ » » θὰ καύσῃ χ »

Λύσις. Ἀφοῦ εἰς $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας καίει $\frac{7}{2}$ ὀκ.
» $\frac{1}{4}$ » θὰ καύσῃ $\frac{7}{2 \times 3}$ »

καὶ εἰς $\frac{4}{4}$, ἤτοι 1 ὥρ. θὰ καύσῃ $\frac{7\times4}{2\times3}$ »
ἑπομένως » $\frac{1}{5}$ τῆς ὥρας » » $\frac{7\times4}{2\times3\times5}$ »
καὶ » $\frac{2}{5}$ » » » » $\frac{7\times4\times2}{2\times3\times5}=\frac{28}{15}=1\frac{13}{15}$ ὀκάδας.

Ἂν τρέψωμεν τὰ κλάσματα $\frac{3}{4}$ καὶ $\frac{2}{5}$ εἰς ὁμώνυμα, τὸ αὐτὸ πρόβλημα λύεται οὕτως·

Διάταξις: Εἰς $\frac{15}{20}$ τῆς ὥρας καίει $\frac{7}{2}$ ὀκ. πετρελαίου,
» $\frac{8}{20}$ » » » χ » »

Λύσις. Ἀφοῦ εἰς $\frac{15}{20}$ τῆς ὥρας καίει $\frac{7}{2}$ ὀκ. πετρελαίου,
» $\frac{1}{20}$ » » θὰ καύσῃ $\frac{7}{2\times15}$ » »
καὶ » $\frac{8}{20}$ » » » » $\frac{7\times8}{2\times15}=1\frac{13}{15}$ ὀκάδας.

Πρόβλ. 10) Ἐργάτης τις λαμβάνει ἡμερομίσθιον 28 γρόσια, πόσον θὰ λάβῃ εἰς $2\frac{1}{2}$ ἡμέρας;

Διάταξις: Εἰς 1 ἡμέραν λαμβάνει 28 γρόσια,
» $2\frac{1}{2}$ » θὰ λάβῃ χ »

Λύσις. Ἀφοῦ εἰς 1 ἡμέραν λαμβάνει 28 γρόσια
» 2 ἡμέρας θὰ λάβῃ $28\times2=56$ »
καὶ » $\frac{1}{2}$ τῆς ἡμέρ. » » $\frac{28}{2}=14$ »
ἄρα » $2\frac{1}{2}$ » » » » $56+14=70$ »

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος τούτου συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα:

Κανών.

Ὅταν εἰς πρόβλημα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν ζητῆται ἡ ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ εἰς ἀριθμόν, ὅστις σύγκειται ἢ δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς μέρη, τῶν ὁποίων ἄλλα μὲν εἶναι πολλαπλάσια, ἄλλα δὲ ἁπλᾶ μέρη τοῦ ἀριθμοῦ, τοῦ ὁποίου τὴν ἀντιστοιχοῦσαν τιμὴν γνωρίζομεν, εὑρίσκομεν τὴν εἰς ἕκαστον μέρος ἀντιστοιχοῦσαν τιμὴν καὶ τὸ ἄθροισμα τούτων εἶναι ἡ ζητουμένη.

Ἡ μέθοδος αὕτη λέγεται *μέθοδος τῶν ἁπλῶν μερῶν.*

Σημ. Διὰ τῆς μεθόδου ταύτης οἱ μικροπωληταὶ μεθοδικώτατα καὶ ἁπλούστατα τῇ βοηθείᾳ τῶν δακτύλων λύουσι τὰ ἐν τῷ ἐμπορίῳ αὐτῶν παρουσιαζόμενα προβλήματα.

Πρόβλ. 11) 8 ἄνθρωποι ἐδαπάνησαν $20\frac{3}{4}$ γρόσια. Πόσα γρόσια θὰ δαπανήσωσι 36 ἄνθρωποι;

Διάταξις: Ἐὰν 8 ἄνθρωποι δαπανῶσι $\frac{83}{4}$ γρόσ.
οἱ 36 » θὰ δαπανήσωσι χ »

Λύσις. Ἀφοῦ οἱ 8 ἄνθρωποι δαπανῶσι $\frac{83}{4}$ »
οἱ 32 » ἤτοι τετραπλάσιοι τῶν 8 ἄνθρωποι θὰ δαπανήσωσι τετραπλάσια, ἤτοι 83 γρόσια.
καὶ οἱ 4 ἄνθρωποι, ἤτοι οἱ ἡμίσεις τῶν 8, θὰ δαπανήσωσι τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ $\frac{83}{4}$, ἤτοι $\frac{83}{8}$ γρόσ.
ὥστε οἱ $32+4=36$ ἄνθρωποι θὰ δαπανήσωσι
$83\frac{83}{8}=93\frac{3}{8}$ γρόσια.

Πρόβλ. 12) Ἡ ὀκὰ τῆς ζαχάρεως ἀξίζει 3 γρόσ. Πόσους παράδες ἀξίζουν τὰ 175 δράμια;

Ἐπειδὴ μία ὀκὰ τρέπεται εἰς 400 δράμ., καὶ τὰ 3 γρόσ. εἰς 120 παράδες θὰ ἔχωμεν:

Διάταξις: Τὰ 400 δράμ. ἀξίζουν 120 παρ.
» 175 » » χ »

Λύσις. Ἐπειδὴ $175=100+50+25$ δράμια, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς:

Ἀφοῦ τὰ 400 δράμ. ἀξίζουν 120 παρ.
» 100 » θὰ ἀξίζουν 30 »
» 50 » » » 15 »
καὶ » 25 » » » $7\frac{1}{2}$ »

ἄρα τὰ $100+50+25=175$ δράμ. θὰ ἀξίζουν $30+15+7\frac{1}{2}$ $=52\frac{1}{2}$ παράδες.

Πρόβλ. 13) Ξενοδόχος ἠγόρασε $5\frac{1}{4}$ ὀκάδας κρέατος διὰ 30 μερίδας. Ἐὰν ἡ πελατεία αὐτοῦ αὐξηθῇ καὶ εἶναι ἀνάγκη νὰ κατασκευάσῃ 50 μερίδας, πόσον κρέας πρέπει νὰ ἀγοράσῃ;

Διάταξις: Διὰ 30 μερίδας ἀγοράζει $5\frac{1}{4}=\frac{21}{4}$ ὀκ. κρέατ.
» 50 » θὰ ἀγοράσῃ χ » »

Λύσις διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα.

Διὰ 30 μερίδας ἀγοράζει $5\frac{1}{4}=\frac{21}{4}$ ὀκ. κρέατ.

» 1 μερίδα θὰ ἀγοράσῃ $\frac{21}{4\times 30}$ » »

καὶ » 50 μερίδας » » $\frac{21\times 50}{4\times 30}=\frac{105}{12}=8\frac{3}{4}$ ὀκ. κρέατ.

Λύσις διὰ τῆς μεθόδου τῶν ἁπλῶν μερῶν.

Διὰ 30 μερίδας ἀγοράζει $\frac{21}{4}$ ὀκ. κρ.

» 15 » θὰ ἀγοράσῃ τὸ $\frac{1}{2}$, τοῦ $\frac{21}{4}$ ἤτοι $\frac{21}{4\times 2}=\frac{21}{8}$ ὀκ. κρ.

καὶ » 5 » » » » $\frac{1}{3}$ » $\frac{21}{8}$ » $\frac{21}{8\times 3}=\frac{7}{8}$ » »

ἄρα διὰ 30+15+5 μερ. = 50 μερίδας θὰ ἀγοράσῃ

$$\frac{21}{4}+\frac{21}{8}+\frac{7}{8}=\frac{42}{8}+\frac{21}{8}+\frac{7}{8}=8\frac{3}{4} \text{ ὀκ. κρέατ.}$$

Πρόβλ. 14. Τί μέρος τῆς ὀκᾶς εἶναι τὸ 1 δράμιον ;

Λύσις. Ἀφοῦ 400 δράμ. ἀποτελοῦσι 1 ὀκάν, 1 δράμιον θὰ εἶναι τὸ $\frac{1}{400}$ τῆς ὀκᾶς.

Πρόβλ. 15) Τ μέρος τῆς ὀκᾶς εἶναι τὸ γραμμάριον ;

» 16) Τί μέρος τοῦ πήχεως εἶναι ἓν ρούπιον ;

» 17) Τί μέρος τοῦ πήχεως εἶναι εἷς δάκτυλος ;

» 18) Τί μέρος τῆς ὑάρδας εἶναι ὁ δάκτυλος τοῦ μέτρου;

» 19) Τί μέρος τῆς ὑάρδας εἶναι ὁ ἀγγλικὸς πούς;

» 20) Τί μέρος τῆς ὑάρδας εἶναι ὁ ἀγγλ. δάκτυλος ;

» 21) Τί μέρος τοῦ τεκτονικοῦ πήχεως εἶναι ἓν παρμάκι; καὶ τί μέρος εἶναι ὁ δάκτυλος τοῦ μέτρου ;

» 22) Τί μέρος τοῦ παλαιοῦ στρέμματος εἶναι τὸ τετραγωνικὸν μέτρον;

» 23) Τί μέρος τοῦ νέου στρέμματος εἶναι τὸ τετραγωνικὸν μέτρον ;

» 24) Τί μέρος τοῦ ἑκταρίου εἶναι τὸ τετραγων. μέτρον;

» 25) Τί μέρος τοῦ ἑκταρίου εἶναι τὸ ἄρ ;

» 26) Τί μέρος τοῦ ἑκταρίου εἶναι τὸ νέον στρέμμα ;

» 27) Τί μέρος τοῦ κυβικοῦ μέτρου εἶναι ἡ λίτρα ;

» 28) Τί μέρος τοῦ κυβικοῦ μέτρου εἶναι τὸ κοιλόν ;

Πρόβλ. 29) Πόσα γραμμ. ἔχει τὸ ἓν δράμ. καὶ πόσα τὰ 5 δράμ.;

1 ὀκὰ ἢ 400 δράμια ἰσοδυναμοῦν μὲ 1 280 γραμμάρια·

1 δράμιον ἰσοδυναμεῖ μὲ χ »

ὅθεν εὑρίσκομεν $\chi = \frac{128}{40} = \frac{16}{5} = 3\frac{1}{5}$

Ἐκ τούτου εὑρίσκομεν ὅτι 5 δράμ. ἰσοδυναμοῦν πρὸς 16 γραμμ.

Πρόβλ. 30). Πρὸς κατασκευὴν λαιμοδετῶν ἠγόρασέ τις $\frac{3}{5}$ τοῦ πήχεως μεταξωτοῦ ἀντὶ 30 γροσ. Πόσον ἀξίζει ἡ ὑάρδα;

Διάταξις. $\frac{3}{5}$ πήχ. ἀξίζουν 30 γρόσ.

1 ὑάρδα ἀξίζει χ

Λύσις. Τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ πήχεως τρέπονται εἰς 39 δακτύλους, ἡ δὲ ὑάρδα εἰς 91 δακτύλους, καὶ οὕτως ἔχομεν:

Οἱ 39 δάκτυλοι ἀξίζουν 30 γρόσια,

» 91 » » χ », ὅθεν $\chi = \frac{30 \times 91}{39} = 70$ γρ.

Πρόβλ. 31). Ἐὰν ἐργάτρια ὑφαίνῃ εἰς 5 ὥρας $8\frac{5}{8}$ πήχεις, πόσον θὰ ὑφάνῃ εἰς $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας; Ἀπ $1\frac{47}{160}$.

Πρόβλ. 32). 5 ρούπια ὑφάσματος ἠγοράσθησαν $\frac{3}{4}$ τοῦ γροσίου· πόσον τιμᾶται ὁ πῆχυς; Ἀπ. $1\frac{1}{5}$.

Πρόβλ. 33). Ἡ ὀκὰ τοῦ οἴνου ἀξίζει 2 γρόσια. Πόσον θὰ πληρώσῃ τις διὰ 150 δράμια;

Διὰ τὴν 1 ὀκ., ἤτοι 400 δράμ., πληρώνει 2 γρόσ., ἤτοι 80 παρ.,

διὰ τὰ 150 » θὰ πληρώσῃ χ παρ.

Λύσις. Ἀφοῦ τὰ 400 δράμ. ἀξίζουν 80 παρ.,

τὰ 100 » θὰ ἀξίζουν $\frac{80}{4} = 20$ παρ.

καὶ τὰ 50 » » $\frac{20}{2} = 10$ παρ.

ἄρα τὰ $100 + 50 = 150$ δράμ. ἀξίζουν $20 + 10 = 30$ παρ.

Πρόβλ. 34). Τὰ $\frac{3}{5}$ τῆς ὀκᾶς πόσα δράμια εἶναι; Ἀπ. 240.

Πρόβλ. 35). Ἐὰν $\frac{4}{7}$ τῆς χωρητικότητος βαρελίου εἶναι 140 ὀκ., πόσας ὀκάδας χωρεῖ τὸ βαρέλιον; Ἀπ. 245 ὀκ.

Πρόβλ 36). Ἡ ὀκὰ τοῦ σίτου ἀξίζει ἓν γρόσιον· πόσον ἀξίζουν 175 δράμ.; Ἀπ. $17\frac{1}{2}$ παρ.

Πρόβλ. 37). Πόσα γρόσια εἶναι τὰ $\frac{5}{12}$ τῆς τουρκ. λίρ.; Ἀπ. 45.

Πρόβλ. 38) Πόσα γρόσια εἶναι τὰ $\frac{2}{3}$ καὶ τὸ $\frac{1}{6}$ τῆς τουρκικῆς λίρας ; 'Απ. 90

Πρόβλ. 39) Φιλάνθρωπος ἀποθανὼν διεμοίρασε τὴν περιουσίαν του ὡς ἑξῆς : τὸ $\frac{1}{3}$ ἀφῆκεν εἰς τὰ σχολεῖα, τὰ $\frac{2}{7}$ εἰς τὴν ἐκκλησίαν καὶ τὸ ὑπόλοιπον, ὅπερ εἶναι 6 400 φράγ., ἀφῆκεν εἰς τὸ νοσοκομεῖον. Πόση ἦτο ἡ περιουσία ;

'Απ. Ἡ περιουσία ἦτο 16 800 φράγ. Εἰς τὰ σχολεῖα ἀφῆκε 5600 φρ. καὶ εἰς τὴν ἐκκλησίαν 4 800 φρ.

Πρόβλ. 40) Πόσα ρούπια εἶναι τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ πήχεως ; 'Απ. 6.

Πρόβλ. 41) Πόσα γρόσια ἀξίζουν 15 $\frac{1}{2}$ πήχεις ὑφάσματος, τοῦ ὁποίου οἱ 8$\frac{3}{4}$ πήχεις ἠγοράσθησαν ἀντὶ 11 $\frac{3}{4}$. 'Απ. 20 $\frac{57}{70}$ γροσ.

Ὁδηγία. Εὑρίσκομεν πόσον ἀξίζει ὁ εἷς πῆχυς καὶ ὕστερον οἱ 15$\frac{1}{2}$.

Πρόβλ. 42) Ἐπιχειρηματίας εἰσέπραξεν ἔκ τινος ἐπιχειρήσεως 15 800 φράγ. Εἰς ταῦτα περιλαμβάνεται τὸ κεφάλαιον καὶ τὰ κέρδη, τὰ ὁποῖα κατὰ τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ ἀρχικοῦ κεφαλαίου. Πόσον εἶναι τὸ κεφάλαιον καὶ πόσα τὰ κέρδη ;

Ἐὰν παρασταθῇ διὰ $\frac{4}{4}$ τὸ κεφάλαιον, τότε τὸ κεφάλαιον καὶ τὰ κέρδη θὰ εἶναι $\frac{4}{4}+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$ ἄρα τὰ $\frac{5}{4}$ εἶναι 15 800. Ἐκ τούτων εὐκόλως εὑρίσκομεν, ὅτι τὰ κέρδη εἶναι 3 160 φρ., τὸ δὲ κεφάλαιον 12 640 φρ.

Πρόβλ. 43) Ἐργάτης σκάπτει μίαν ἄμπελον μόνος εἰς 15 ἡμέρας, δεύτερος ἐργάτης σκάπτει τὴν αὐτὴν ἄμπελον ἐπίσης μόνος εἰς 12 ἡμέρας, καὶ τρίτος εἰς 20. Ἐὰν καὶ οἱ τρεῖς ἐργασθῶσιν ὁμοῦ, εἰς πόσας ἡμέρας θὰ σκάψουν τὴν αὐτὴν ἄμπελον ;

Λύσις. Ὁ πρῶτος, ἀφοῦ εἰς 15 ἡμέρας σκάπτει μίαν ἄμπελον, εἰς μίαν ἡμέραν θὰ σκάψῃ τὸ $\frac{1}{15}$ τῆς ἀμπέλου· ὁ δεύτερος εἰς μίαν ἡμέραν σκάπτει μόνος τὸ $\frac{1}{12}$, καὶ ὁ τρίτος τὸ $\frac{1}{20}$ μόνον. Καὶ οἱ τρεῖς δὲ ὁμοῦ εἰς μίαν ἡμέραν σκάπτουν τὸ $\frac{1}{15}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}$, ἤτοι τὸ $\frac{1}{5}$ τῆς ἀμπέλου, ἄρα ὅλην τὴν ἄμπελον εἰς 5 ἡμέρας.

Πρόβλ. 44) Ἔμπορός τις διέθεσε τὸ $\frac{1}{4}$ τῆς περιουσίας του διά τινα ἐπιχείρησιν, ἐκ τῆς ὁποίας εἰσέπραξε 6 354 φρ. καὶ εὗρεν, ὅτι ηὐξήθη ἡ περιουσία του κατὰ τὸ $\frac{1}{5}$ αὐτῆς. Πόση ἦτο ἡ περιουσία του;

Λύσις. Τὰ 6 354 φρ. εἶναι τὸ $\frac{1}{4}$ τῆς περιουσίας του, τὸ ὁποῖον διέθεσε, καὶ τὸ $\frac{1}{5}$ αὐτῆς, κατὰ τὸ ὁποῖον ηὐξήθη, δηλ. τὰ 6 354 φρ. εἶναι τὸ $\frac{1}{4}$ καὶ $\frac{1}{5}$, ἤτοι τὰ $\frac{9}{20}$ τῆς περιουσίας.

Ἀφοῦ λοιπὸν τὰ $\frac{9}{20}$ τῆς περιουσίας του εἶναι 6 354 φρ., ὅλη ἡ περιουσία εἶναι $706 \times 20 = 14\,120$ φρ.

Πρόβλ. 45) Νὰ εὑρεθῶσι τὸ $\frac{1}{5}$ καὶ ἔπειτα τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ ἀριθμοῦ $\frac{4}{7}$.

Τὸ ἓν πέμπτον του $\frac{4}{7}$ εἶναι $\frac{4}{7 \times 5}$ ἢ $\frac{4}{7} \times \frac{1}{5}$, τὰ δὲ τρία πέμπτα εἶναι $\frac{4 \times 3}{7 \times 5}$ ἢ $\frac{4}{7} \times \frac{3}{5}$.

Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι, *ἵνα εὕρωμεν ἓν ἢ πλειότερα μέρη ἀριθμοῦ τινος, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὴν κλασματικὴν μονάδα ἢ ἐπὶ τὸν κλασματικὸν ἀριθμόν, ὅστις ὁρίζει τὸ μέρος ἢ τὰ μέρη.*

Πρόβλ. 46) Ὁ $\frac{3}{7}$ τί μέρος εἶναι τοῦ $\frac{4}{5}$;

Ἐὰν ὁ ζητούμενος ἀριθμός, ὅστις ὁρίζει τὸ μέρος, πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν $\frac{4}{5}$, δίδει τὸν ἀριθμὸν $\frac{3}{7}$. Ἀλλ' ὅταν πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμόν τινα ἐπὶ τὸν $\frac{4}{5}$, θὰ λάβωμεν τὰ $\frac{4}{5}$ αὐτοῦ, τὰ ὁποῖα εἶναι ὁ ἀριθμὸς $\frac{3}{7}$.

Ἄρα τὰ $\frac{4}{5}$ (μέρη) τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ εἶναι ὁ $\frac{3}{7}$
τὸ $\frac{1}{5}$ (μέρος) » » » » » $\frac{3}{7 \times 4}$
καὶ τὰ $\frac{5}{5}$ (μέρη) » » « » » $\frac{3 \times 5}{7 \times 4}$,

Ὁ $\frac{3}{7}$ λοιπὸν εἶναι τὰ $\frac{15}{28}$ τοῦ $\frac{4}{5}$.

Ἐπειδὴ δὲ $\frac{3 \times 5}{7 \times 4} = \frac{3}{7} : \frac{4}{5}$, τὸ πρόβλημα τοῦτο ἐκφράζεται καὶ ὡς ἑξῆς·

Ποῖον εἶναι τὸ πηλίκον (λόγος) *τοῦ* $\frac{3}{7}$ *διὰ* $\frac{4}{5}$ ἢ καὶ ὡς ἑξῆς:

Ποῖος εἶναι ὁ λόγος τοῦ $\frac{3}{7}$ *πρὸς* $\frac{4}{5}$;

Πρόβλ. 48) *Τί μέρος τοῦ 5 εἶναι ὁ 3;* Ἀπ. $\frac{3}{5}$.

Πρόβλ. 49) *Ποῖος εἶναι ὁ λόγος τοῦ 9 πρὸς* $\frac{3}{4}$; Ἀπ. 12.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

182. Εἴδομεν ὅτι, ἐὰν τὴν ἀκεραίαν μονάδα διαιρέσωμεν εἰς ἴσα μέρη, ἕκαστον τῶν μερῶν τούτων λέγεται *κλασματικὴ μονάς*.

'Εὰν τὴν ἀκεραίαν μονάδα διαιρέσωμεν εἰς 10, 100, 1000, ἢ 10 000 κτλ. ἴσα μέρη, ἕκαστον μέρος λέγεται *κλασματικὴ δεκαδικὴ μονάς*, ἢ ἁπλῶς *δεκαδικὴ μονάς*.

Δεκαδικαὶ λοιπὸν *μονάδες* λέγονται αἱ κλασματικαὶ μονάδες, αἳ ἔχουσαι παρονομαστὴν τὴν ἀκεραίαν μονάδα ἀκολουθουμένην ὑπὸ μηδενικῶν, οἷαι εἶναι αἱ ἑξῆς : $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$.

Δεκαδικὸς ἀριθμὸς λέγεται *ὡρισμένον πλῆθος δεκαδικῶν μονάδων ἢ καὶ μία μόνη μονάς*. Οὕτω : $\frac{5}{100}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{4}{10}$, κτλ. εἶναι δεκαδικοὶ ἀριθμοί.

'Επειδὴ οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι καὶ αὐτοὶ κλάσματα, ἰσχύουσι καὶ ἐπ' αὐτῶν πᾶσαι αἱ ἰδιότητες καὶ αἱ πράξεις τῶν κλασμάτων, τὰ ὁποῖα πρὸς διάκρισιν λέγονται *κοινὰ κλάσματα*· οὕτω π. χ. ἐκ τῆς ἰδιότητος (125) ἔχομεν $\frac{1}{10}=\frac{10}{100}=\frac{100}{1000}$ κτλ., $\frac{1}{100}=\frac{10}{1000}$, $\frac{1}{1000}=\frac{10}{10000}$.

'Εκ δὲ τῆς ἰδιότητος (127) ἕπεται, ὅτι τὸ $\frac{1}{10}$ εἶναι δεκαπλάσιον τοῦ $\frac{1}{100}$, τὸ $\frac{1}{1000}$ εἶναι τὸ δέκατον τοῦ $\frac{1}{100}$, τὸ ὁποῖον πάλιν εἶναι τὸ δέκατον τοῦ $\frac{1}{10}$.

'Εκ δὲ τῆς προσθέσεως εὑρίσκομεν, ὅτι

$\frac{3}{10}+\frac{5}{100}+\frac{9}{1000}=\frac{359}{1000}$. 'Ομοίως $2+\frac{5}{10}+\frac{4}{100}=2\frac{54}{100}=\frac{254}{100}$.

Γραφὴ τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

183. 'Εκ τῶν ἀνωτέρω βλέπομεν ὅτι, ἐὰν γράψωμεν τὴν ἑξῆς σειρὰν τῶν ἀριθμῶν 1000, 100, 10, 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$ κτλ.

῞Εκαστος τούτων εἶναι δεκάκις μεγαλείτερος τοῦ πρὸς τὰ δεξιὰ εὑρισκομένου, δεκάκις δὲ μικρότερος τοῦ πρὸς τὰ ἀριστερά.

Ἐπειδὴ δὲ αἱ δεκαδικαὶ μονάδες σχηματίζονται αἱ μὲν ἐκ τῶν δέ, ὅπως εἰς τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς σχηματίζονται αἱ μονάδες τῶν διαφόρων τάξεων, διὰ τοῦτο κατὰ συνθήκην καὶ οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ γράφονται, ὅπως καὶ οἱ ἀκέραιοι, δηλ.:

Πᾶν ψηφίον ἢ πᾶς ἀριθμὸς γραφόμενος πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἄλλου σημαίνει μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως.

Οὕτως, ἵνα γράψωμεν δεκαδικὸν ἀριθμόν, γράφομεν πρῶτον τὸ ἀκέραιον αὐτοῦ μέρος, ἢ ἐὰν δὲν ἔχῃ τοιοῦτον, γράφομεν 0 καὶ ἔπειτα ὑποδιαστολήν, διὰ νὰ διακρίνωμεν πόθεν ἄρχεται τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ ἀριθμοῦ, καὶ προχωροῦντες πρὸς τὰ δεξιὰ γράφομεν πρῶτον τὰ δέκατα, ἔπειτα τὰ ἑκατοστά, τὰ χιλιοστά, τὰ δεκάκις χιλιοστὰ καὶ οὕτω καθ᾿ ἑξῆς. Ἂν δὲ μονάδες τάξεώς τινος δὲν ὑπάρχουν, συμπληροῦμεν τὴν θέσιν αὐτῶν διὰ τοῦ βοηθητικοῦ ψηφίου **0**.

Π. χ. ὁ ἀριθμός, ὅστις περιέχει 7 ἀκεραίας μονάδας, 5 δέκατα, 9 χιλιοστά, 8 δεκάκις χιλιοστά, ἀντὶ νὰ γραφῇ $7+\frac{5}{10}+\frac{9}{1000}+\frac{8}{10000}$ κατὰ τὴν ἀνωτέρω συνθήκην γράφεται 7,5098. οὕτως εἶναι $7+\frac{5}{10}+\frac{9}{1000}+\frac{8}{10000}=7{,}5098$. Ὁμοίως ὁ ἀριθμός, ὅστις ἔχει 4 ἑκατοστά, 5 χιλιοστά, 7 δεκάκις χιλιοστά, ἀντὶ νὰ γραφῇ $\frac{4}{100}+\frac{5}{1000}+\frac{7}{10000}$ γράφεται 0,0457.

Ἑπομένως $\frac{4}{100}+\frac{5}{1000}+\frac{7}{10000}=0{,}0457$.

Ὁμοίως $35+\frac{4}{100}+\frac{7}{10000}=35{,}0407$.

Δεκαδικὰ ψηφία τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ λέγονται πάντα, ὅσα εὑρίσκονται δεξιὰ τῆς ὑποδιαστολῆς.

Γραφὴ τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν ὡς κοινῶν κλασμάτων

184. Εἴπομεν ἀνωτέρω, ὅτι

$$6+\frac{5}{10}+\frac{4}{100}+\frac{9}{1000}=6{,}549.$$

Ἐὰν δὲ τοῦ ἀριθμοῦ $6+\frac{5}{10}+\frac{4}{100}+\frac{9}{1000}$ τὰ διάφορα κλάσματα τρέψωμεν εἰς ὁμώνυμα καὶ προσθέσωμεν, θὰ ἔχωμεν

$$6+\frac{5}{10}+\frac{4}{100}+\frac{9}{1000}=6+\frac{549}{1000}.$$

Ἑπομένως εἶναι $6{,}549=6\,\frac{549}{1000}$.

'Εὰν δὲ τρέψωμεν καὶ τὸν μικτὸν $6\frac{549}{1000}$ εἰς κλασματικόν, εὑρίσκομεν $6,549=6\frac{549}{1000}=\frac{6549}{1000}$.

'Ομοίως ὁ δεκαδικὸς 16,35 γράφεται $16\frac{35}{100}$ ἢ καὶ ὡς ἑξῆς $\frac{1635}{100}$, καὶ ὁ ἀριθμὸς 0,0067 γράφεται $\frac{67}{10000}$.

'Εκ τούτων συνάγομεν, ὅτι

Πᾶς δεκαδικὸς ἀριθμὸς δύναται νὰ γραφῇ ὡς κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὸν ἀκέραιον, ὅστις προκύπτει, ἐὰν παραλείψωμεν τὴν ὑποδιαστολήν, παρονομαστὴν δὲ τὴν ἀκεραίαν μονάδα ἔχουσαν κατόπιν αὐτῆς τόσα μηδενικά, ὅσα εἶναι τὰ δεκαδικὰ ψηφία τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ. Καὶ ἀντιστρόφως:

Διὰ νὰ γράψωμεν κλάσμα, τοῦ ὁποίου παρονομαστὴς εἶναι ἡ μονὰς ἔχουσα κατόπιν αὐτῆς μηδενικά, δηλ. 10, 100, 1000 κτλ. ὡς δεκαδικὸν ἀριθμόν, γράφομεν πρῶτον τὸν ἀριθμητὴν αὐτοῦ καὶ χωρίζομεν δεξιὰ τούτου δι' ὑποδιαστολῆς τόσα δεκαδικὰ ψηφία, ὅσα εἶναι τὰ μηδενικὰ τοῦ παρονομαστοῦ. 'Εὰν δὲ ὁ ἀριθμητὴς δὲν ἔχῃ ἀρκετὰ ψηφία, ἵνα χωρίσωμεν, γράφομεν ἐμπρὸς (ἀριστερὰ) αὐτοῦ μηδενικά.

'Εὰν τὸ δοθὲν κλάσμα ἔχῃ καὶ ἀκέραιον μέρος (μικτός), τρέπομεν τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα καὶ πράττομεν ὡς ἀνωτέρω.

'Απαγγελία τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

185. Πᾶς δεκαδικὸς ἀριθμός, οἷον ὁ 2,769, ἀπαγγέλλεται συνήθως, ὅπως καὶ οἱ τρεῖς ἀριθμοί:

$$2+\frac{7}{10}+\frac{6}{100}+\frac{9}{1000},\quad 2+\frac{769}{1000},\quad \text{καὶ}\quad \frac{2769}{1000},$$

πρὸς τοὺς ὁποίους εἶναι ἴσος. 'Απαγγέλλομεν δηλ. χωριστὰ ἕκαστον ψηφίον λέγοντες: 2 ἀκέραιαι μονάδες, 7 δέκατα, 6 ἑκατοστά, 9 χιλιοστά, ὅπως ἠθέλομεν ἀπαγγείλῃ τὸν πρῶτον, ἢ λέγομεν 2 ἀκέραιος καὶ 769 χιλιοστά, ὅπως ἀπαγγέλλεται ὁ $2\frac{769}{1000}$, ἢ τέλος λέγομεν 2769 χιλιοστά, ὅπως ἀπαγγέλλεται ὁ $\frac{2769}{1000}$.

'Εκ τούτων συνάγομεν τοὺς ἑξῆς κανόνας:

186. ***Διὰ νὰ ἀπαγγείλωμεν δεκαδικὸν ἀριθμόν, ἀπαγγέλλομεν***

ἕκαστον ψηφίον αὐτοῦ χωριστὰ μὲ τὸ ὄνομα τοῦ εἴδους τῶν μονάδων του· ἤ

Ἀπαγγέλλομεν χωριστὰ τὸ ἀκέραιον αὐτοῦ μέρος καὶ ἔπειτα τὸ δεκαδικὸν μὲ τὸ ὄνομα τοῦ εἴδους τῶν μονάδων τοῦ τελευταίου πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφίου· ἤ

Ἀπαγγέλλομεν ὅλον τὸν ἀριθμὸν ὡς ἀκέραιον καὶ ὀνομάζομεν μὲ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων τοῦ τελευταίου πρὸς τὰ δεξιὰ δεκαδικοῦ ψηφίου.

Σημ. Οἱ τρεῖς οὗτοι τρόποι τῆς ἀπαγγελίας, καὶ μάλιστα ὁ τελευταῖος, συνηθίζονται ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον, ὅταν τὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι ὀλίγα· ὅταν τὰ ψηφία τοῦ δεκαδικοῦ εἶναι πολλά, τότε:

Χωρίζομεν τὸν δεκαδικὸν ἀρχόμενοι ἐκ τῆς ὑποδιαστολῆς εἰς τμήματα συνήθως τριψήφια καὶ ἀπαγγέλλομεν πρῶτον τὸν ἀκέραιον, ἔπειτα δὲ ἕκαστον τμῆμα μὲ τὸ ὄνομα τοῦ εἴδους τῶν μονάδων τοῦ τελευταίου ψηφίου τοῦ τμήματος.

Οὕτω χωρίζοντες εἰς τριψήφια τμήματα, τὸ πρῶτον τριψήφιον τμῆμα λέγομεν *χιλιοστά*, τὸ δεύτερον *ἑκατομμυριοστά*, τὸ τρίτον *δισεκατομμυριοστὰ* κτλ.

Σημ. Τὸ τελευταῖον πρὸς τὰ δεξιὰ τμῆμα δύναται νὰ εἶναι μονοψήφιον ἢ διψήφιον. Ἀλλὰ τοῦτο θεωροῦμεν καὶ ἀπαγγέλλομεν ὡς δεκαδικὸν μέρος τοῦ ἀμέσως προηγουμένου τμήματος. Οὕτω τὸν ἀριθμὸν 87,843 502 68 ἀπαγγέλλομεν ὡς ἑξῆς: 87 ἀκέραιος, 843 χιλιοστά, 502 ἑκατομμυριοστὰ καὶ 68 ἑκατοστὰ τῶν ἑκατομμυριοστῶν.

Παρατήρησις. Διὰ νὰ γράφωμεν ἀλανθάστως καὶ εὐκόλως δεκαδικὸν ἀριθμὸν ἀπαγγελλόμενον, πρέπει νὰ προσέχωμεν εἰς τὰ ἑξῆς:

Ἂν μὲν ὁ δεκαδικὸς ἀπαγγέλληται ἀνὰ ἓν ψηφίον, νὰ γράφωμεν τὰ δέκατα ἀμέσως μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν, τὰ ἑκατοστὰ εἰς τὴν δευτέραν θέσιν, καὶ ἂν δὲν ὑπάρχουν, νὰ γράφωμεν 0, τὰ χιλιοστὰ εἰς τὴν τρίτην, τὰ δεκάκις χιλιοστὰ εἰς τὴν τετάρτην καὶ καθ' ἑξῆς, θέτοντες πάντοτε 0 εἰς τὴν θέσιν τῶν μονάδων, αἵτινες δὲν ὑπάρχουν.

Π. χ. 35 ἀκέραιαι, 4 χιλιοστά, 5 δεκάκις χιλιοστά, γράφονται 35,0045, ὁ δὲ 3 δέκατα, 8 δεκάκις χιλιοστὰ γράφεται 0,3008 κλ.

Ἂν ὁ δεκαδικὸς ἀπαγγέλληται ὡς ἀκέραιος, πρέπει νὰ προσέχωμεν εἰς τὸ ὄνομα τῶν μονάδων, τὰς ὁποίας θὰ ὁρίσουν. Καὶ ἂν μὲν ὁρίσουν δέκατα, χωρίζομεν δεξιὰ ἓν ψηφίον ὡς δεκαδικόν, ἂν δὲ ἑκατοστά, χωρίζομεν δεξιὰ δύο ψηφία ὡς δεκαδικά, ἂν δὲ χιλιοστά, τρία, τὰ δεκάκις χιλιοστὰ γράφομεν μὲ τέσσαρα ψηφία, τὰ ἑκατοντάκις μὲ πέντε, καὶ ἐν γένει χωρίζομεν τόσα ψηφία δεκαδικά, ὅσα μηδενικὰ θὰ εἶχεν ὁ παρονομαστής, ἂν ἐγράφομεν τὸν ἀριθμὸν ὡς κλάσμα.

Π. χ. Ὁ ἀριθμὸς 603 δεκάκις χιλιοστά, ἤτοι $\frac{603}{10000}$, γράφεται μὲ τέσσαρα δεκαδικὰ ψηφία, ὅσα δηλ. μηδενικὰ ἔχει ὁ 10000· οὕτω 0,0603· ὁ 45 ἑκατοντάκις χιλιοστὰ γράφεται μὲ πέντε δεκαδικὰ ψηφία οὕτω 0,00045.

Ἰδιότητες τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

187. *Ἡ ἀξία τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν γραφῶσι δεξιὰ αὐτοῦ ὁσαδήποτε μηδενικά.*

Παράδειγμα. Ὁ ἀριθμὸς 3,56, ὁ 3,560, καὶ ὁ 3,56000 εἶναι ἴσοι, διότι τὰ σημαντικὰ ψηφία καὶ ἡ θέσις τούτων ὡς πρὸς τὴν ὑποδιαστολὴν εἶναι εἰς ὅλους τὰ αὐτά. Ἔχουσι λοιπὸν ὅλοι 3 ἀκέραιον, 5 δέκατα, καὶ 6 ἑκατοστά. Ἡ ἀλήθεια τῆς προτάσεως ταύτης φαίνεται, καὶ ἐὰν γράψωμεν τοὺς δεκαδικοὺς ὡς κλάσματα· ὁ πρῶτος καὶ ὁ τελευταῖος π. χ. γράφονται οὕτω $\frac{356}{100}$ καὶ $\frac{356000}{100000}$. Τὰ δύο ταῦτα κλάσματα εἶναι ἴσα, διότι τὸ δεύτερον προκύπτει ἐκ τοῦ πρώτου, ἂν πολλαπλασιασθῶσι καὶ οἱ δύο ὅροι αὐτοῦ ἐπὶ 1000. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ διὰ τὰ ἄλλα.

188. *Δεκαδικὸς ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 10, 100, 1000 κτλ. ἐὰν μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν πρὸς τὰ δεξιὰ μίαν θέσιν (ἐπὶ 10), δύο θέσεις (ἐπὶ 100), τρεῖς θέσεις (ἐπὶ 1000) κτλ. Ἐὰν δὲ μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν πρὸς τὰ ἀριστερά, ὁ δεκαδικὸς διαιρεῖται ὁμοίως.*

Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 57,639. Ἐὰν μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν μίαν θέσιν δεξιά, λαμβάνομεν 576,39. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι δεκάκις μεγαλείτερος τοῦ προηγουμένου, διότι αἱ 57 ἀκέραιαι μονάδες τοῦ πρώτου ἔγιναν εἰς τὸν δεύτερον 57 δεκάδες, ἤτοι ἐδεκαπλασιάσθησαν, τὰ 6 δέκατα $\left(\frac{6}{10}\right)$ ἔγιναν 6 ἀκέραιαι μονάδες. Ἄρα καὶ ταῦτα ἐδεκαπλασιάσθησαν, διότι $\frac{6}{10} \times 10 = 6$, τὰ 3 ἑκατοστά, ἤτοι $\frac{3}{100}$, ἔγιναν 3 δέκατα ἤτοι $\frac{3}{10}$ καὶ τὰ 9 χιλιοστὰ $\frac{9}{1000}$ ἔγιναν 9 ἑκατοστὰ δηλ. $\frac{9}{100}$, ἑπομένως καὶ ταῦτα ἐδεκαπλασιάσθησαν, διότι

$$\frac{3}{100} \times 10 = \frac{3}{10} \text{ καὶ } \frac{9}{1000} \times 10 = \frac{9}{100}.$$

Ἀφοῦ λοιπὸν ὅλα τὰ μέρη τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ ἐδεκαπλασιάσθησαν, καὶ ὁ ἀριθμὸς ὁλόκληρος ἐδεκαπλασιάσθη καὶ ἔγινε 576,39· εἶναι λοιπὸν $57,639 \times 10 = 576,39$.

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι, *ἂν μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν δεξιὰ δύο θέσεις, ὁ ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 100, ἐὰν δὲ τρεῖς, ἐπὶ 1000* κτλ. καὶ προσέτι ὅτι, *ἂν μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν πρὸς τὰ ἀριστερά, ὁ δεκαδικὸς διαιρεῖται*· ἤτοι ὅτι εἶναι

$$57,639 \times 100 = 5763,9 \text{ καὶ } 57,639 \times 1000 = 57639.$$

Προσέτι δὲ $75,62 : 10 = 7,562$.

Τὰ ἀνωτέρω ἀποδεικνύονται, καὶ ἂν γράψωμεν τοὺς δεκαδικοὺς ὡς κλάσματα, οἷον

$$3,576 \times 10 = \frac{3576}{1000} \times 10 = \frac{3576}{100} = 35,76 \cdot \text{ ἐπίσης}$$

$$3,9234 \times 100 = \frac{39234}{10000} \times 100 = \frac{39234}{100} = 392,34, \text{ προσέτι}$$

$$576,4 : 100 = \frac{5764}{10} : 100 = \frac{5764}{1000} = 5,764.$$

Σημ. Ἐὰν μετὰ τὸν ἀνωτέρω πολλαπλασιασμὸν ἡ ὑποδιαστολὴ μετατεθῇ κατόπιν τοῦ τελευταίου ψηφίου τοῦ δεκαδικοῦ, τότε αὕτη δὲν γράφεται καὶ ὁ ἀριθμὸς εἶναι πλέον ἀκέραιος· ἐὰν δὲ ὁ δεκαδικὸς δὲν ἔχῃ ἀρκετὰ ψηφία πρὸς μετάθεσιν τῆς ὑποδιαστολῆς, γράφομεν δεξιὰ τοῦ δεκαδικοῦ ἢ ἔμπροσθεν τοῦ ἀκεραίου μέρους ὅσα πρὸς τοῦτο χρειάζονται μηδενικά, οἷον $3,57 \times 100 = 357$ $0,56 \times 10\,000 = 5\,600$, ἐπειδὴ ὁ δεκαδικὸς δὲν ἔχει ἀρκετὰ ψηφία πρὸς μετάθεσιν τῆς ὑποδιαστολῆς, ἐγράψαμεν κατόπιν τοῦ δεκαδικοῦ δύο μηδενικά.

$7,34 : 100 = 0,0734$, ἐγράψαμεν ἔμπροσθεν τοῦ ἀκεραίου δύο μηδενικά.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Αἱ πράξεις ἐπὶ τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν ὁρίζονται, ὅπως καὶ εἰς κλασματικοὺς ἀριθμοὺς ἐν γένει.

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

189. Διὰ νὰ προσθέσωμεν δύο ἢ περισσοτέρους ἀριθμούς, πρέπει νὰ εὕρωμεν πόσας ἐν γένει ἀκεραίας μονάδας ἔχουσι τὸ ὅλον οἱ δοθέντες ἀριθμοί, πόσα δέκατα, πόσα ἑκατοστά, πόσα χιλιοστὰ κτλ.

Πρὸς τοῦτο *γράφομεν τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς τὸν μὲν κάτωθι τοῦ δὲ οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκωνται ὑπὸ τὴν αὐτὴν στήλην, οἷον αἱ ἁπλαῖ μονάδες ὑπὸ τὰς μονάδας καὶ αἱ ὑποδιαστολαὶ ὁμοίως, τὰ δέκατα ὑπὸ τὰ δέκατα, τὰ ἑκατοστὰ ὑπὸ τὰ ἑκατοστὰ κτλ., ἔπειτα ἐκτελοῦμεν τὴν πρᾶξιν, ὅπως καὶ εἰς τοὺς ἀκεραίους, ἀρχίζοντες ἐκ δεξιῶν καὶ προσέχοντες νὰ γράφωμεν ὑποδιαστολὴν δεξιὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν μονάδων.*

Παρατήρησις. Ἐὰν οἱ δεκαδικοὶ δὲν ἔχουν ἰσάριθμα ψηφία, ἵνα μὴ οἱ ἀρχάριοι κάμνουν λάθη εἰς τὰς στήλας, δυνάμεθα εἰς τοὺς ἔχοντας ὀλιγώτερα δεκαδικὰ νὰ γράφωμεν τὸν ἀπαιτούμενον ἀριθμὸν μηδενικῶν, ὥστε ὅλοι νὰ ἔχωσιν ἴσον ἀριθμὸν δεκαδικῶν ψηφίων.

Παραδείγματα.

Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑξῆς προσθέσεις :

0,0574		0,0574	3,4403		3,6403
36,42		36,4200	0,04		0,0400
3,5	ἢ	3,5000	8	ἢ	8,0000
7,694		7,6940	5,704		5,5840
47,6714		47,6714	17,1843		17,2643.

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

190. Εἰς τὴν ἀφαίρεσιν οἱ ἀριθμοὶ διατάσσονται ὁ μὲν κάτωθι τοῦ δέ, ὅπως ἀνωτέρω εἰς τὴν πρόσθεσιν, δηλ. οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως καὶ αἱ ὑποδιαστολαὶ νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην· ἔπειτα ἐὰν ὁ εἷς τῶν δεκαδικῶν ἔχῃ ὀλιγώτερα ψηφία, θέτομεν δεξιὰ αὐτοῦ μηδενικά, ὥστε νὰ ἔχουν ἰσάριθμα ψηφία. Ἀφαιροῦμεν δέ, ὅπως εἰς τοὺς ἀκεραίους, ἀρχίζοντες ἐκ δεξιῶν, προσέχομεν ὅμως νὰ θέτωμεν ὑποδιαστολὴν δεξιὰ τῆς διαφορᾶς τῶν ἁπλῶν μονάδων.

Παραδείγματα.

32,573	34,5		34,500	74		74,000
0,325	7,874	ἢ	7,874	0,375	ἢ	0,375
32,248			26,626			73,625

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

191. *Τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς πολλαπλασιάζομεν, ὅπως καὶ τοὺς ἀκεραίους, εἰς τὸ γινόμενον ὅμως χωρίζομεν τόσα ψηφία δεκαδικά, ὅσα δεκαδικὰ ἔχουν οἱ δύο παράγοντες.*

Σημ. Ἐν ἀνάγκῃ, ἂν δὲν ὑπάρχουν ἀρκετὰ ψηφία, θέτομεν ἀριστερὰ τοῦ γινομένου μηδενικά.

Εἰς τὸν ἀνωτέρω κανόνα καταντῶμεν, ἐὰν γράψωμεν τοὺς δεκαδικοὺς ὡς κλάσματα καὶ ἐκτελέσωμεν πολλαπλασιασμὸν κλασμάτων.

Παραδείγματα.

Τοὺς ἀριθμοὺς 1,36 καὶ 4,2 πολλαπλασιάζομεν ὡς ἀκεραίους καὶ εἰς τὸ γινόμενον 5712 χωρίζομεν τρία δεκαδικὰ ψηφία, δηλ. ὅσα δεκαδικὰ ἔχουν οἱ δύο παράγοντες, ὅτε εὑρίσκομεν 5,712· διότι, ἐὰν γράψωμεν τούτους ὡς κλάσματα $\frac{136}{100}$ καὶ $\frac{42}{10}$ καὶ πολλαπλασιάσωμεν, θὰ ἔχωμεν $\frac{136}{100}\times\frac{42}{10}=\frac{136\times 42}{1000}=\frac{5712}{1000}$,

$$\begin{array}{r} 1,36 \\ 4,2 \\ \hline 272 \\ 544 \\ \hline 5,712 \end{array}$$

ὅπερ ὡς δεκαδικὸς γράφεται 5,712.

Τὸ γινόμενον $32,54\times 0,003$ θὰ ἔχῃ πέντε δεκαδικά· διότι

$$32,54\times 0,003=\frac{3254}{100}\times\frac{3}{1000}=\frac{9762}{100000}=0,09762.$$

Ἀριστερὰ τοῦ γινομένου, ἐπειδὴ δὲν ὑπῆρχον ἀρκετὰ ψηφία διὰ νὰ χωρίσωμεν, ἐγράψαμεν δύο μηδενικά.

Εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν $3,735\times 45$ τὸ γινόμενον θὰ ἔχῃ τόσα μηδενικά, ὅσα ἔχει ὁ εἷς τῶν παραγόντων, ἐπειδὴ ὁ ἄλλος εἶναι ἀκέραιος· διότι

$$3,735\times 45=\frac{3735}{1000}\times 45=168,075.$$

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

Διαίρεσις δεκαδικοῦ δι' ἀκεραίου.

192. Διὰ νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν δεκαδικοῦ δι' ἀκεραίου, πρέπει νὰ ἐνθυμώμεθα, ὅτι μία ἀκεραία μονὰς ἔχει δέκα δέκατα, ἤτοι $1=\frac{10}{10}$ ἓν δέκατον ἔχει δέκα ἑκατοστὰ $\left(\frac{1}{10}=\frac{10}{100}\right)$, ἓν ἑκατοστὸν περιέχει δέκα χιλιοστὰ $\frac{1}{100}=\frac{10}{1000}$ καὶ γενικῶς μία μονὰς τάξεώς τινος περιέχει δέκα μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας.

Ἂς ὑποθέσωμεν λοιπόν, ὅτι πρόκειται νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 35,784 διὰ 4.

Ἐμάθομεν, ὅτι δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν χωριστὰ ἕκαστον μέρος αὐτοῦ. Διαιροῦμεν λοιπὸν πρῶτον τὸ ἀκέραιον μέρος 35 διὰ 4

```
35,784 | 4
 37    |------
  18   | 8,946
   24
    0
```

καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 8 ἀκέραιον καὶ ὑπόλοιπον 3 ἀκέραιον. Αἱ τρεῖς αὗται ἀκέραιαι μονάδες ἰσοδυναμοῦν μὲ 30 δέκατα καὶ 7 τοῦ διαιρετέου γίνονται τὸ ὅλον 37 δέκατα, τὰ ὁποῖα διαιρούμενα διὰ 4 δίδουν πηλίκον 9 δέκατα καὶ ὑπόλοιπον 1 δέκατον. Τοῦτο τρέπεται εἰς 10 ἑκατοστά, τὰ ὁποῖα μετὰ τῶν 8, τῶν εὑρισκομένων εἰς τὸν διαιρετέον, γίνονται 18. Διαιροῦντες τὰ 18 ἑκατοστὰ διὰ 4 εὑρίσκομεν πηλίκον 4 ἑκατοστὰ καὶ ὑπόλοιπον 2 ἑκατοστά. Τὰ 2 ταῦτα ἑκατοστὰ τρέπονται εἰς 20 χιλιοστά, τὰ ὁποῖα μετὰ τῶν 4 χιλιοστῶν τοῦ διαιρετέου γίνονται 24 χιλιοστά· διαιροῦντες καὶ ταῦτα διὰ 4 εὑρίσκομεν πηλίκον 6 χιλιοστὰ καὶ ὑπόλοιπον 0· οὕτως ἡ διαίρεσις ἐτελείωσε.

Τὸ ζητούμενον πηλίκον τοῦ 35,784 διὰ 4 εἶναι 8,946.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα :

193. Κανών. *Ἡ διαίρεσις δεκαδικοῦ δι' ἀκεραίου ἐκτελεῖται, ὡς ἐὰν καὶ οἱ δύο ἦσαν ἀκέραιοι· καὶ ὅσα μὲν ψηφία τοῦ πηλίκου προέρχονται ἐκ τοῦ ἀκεραίου μέρους τοῦ διαιρετέου εἶναι ἀκέραια καὶ θέτομεν κατόπιν αὐτῶν ὑποδιαστολήν, τὰ δὲ προερχόμενα ἐκ τοῦ δεκαδικοῦ μέρους εἶναι δεκαδικά.*

* Περὶ προσεγγίσεων καὶ λαθῶν.

194. Παράδειγμα. Ἔστω ἡ διαίρεσις 0,0874 : 5.

```
0,0874 | 5
   37  |--------
    24 | 0,0174
     4
```

Ἐκ τῆς διαιρέσεως τῶν 0 ἀκεραίων μονάδων εὑρίσκομεν 0 ἀκέραιον πηλίκον, ὁμοίως καὶ ἐκ τῶν δεκάτων λαμβάνομεν πηλίκον 0· τὰ ἑκατοστὰ δίδουν 1 πηλίκον, τὰ χιλιοστὰ 7 καὶ τὰ δεκάκις χιλιοστὰ 4, μένει δὲ καὶ ὑπόλοιπον 4· ὥστε ἔχομεν $0{,}0874 : 5 = 0{,}0174\frac{4}{5}$. Ἐὰν παραλείψωμεν τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ δεκάκις χιλιοστοῦ καὶ λάβωμεν ὡς πηλίκον τὸν ἀριθμὸν 0,0174, τὸ λάθος $\frac{4}{5}$, τὸ ὁποῖον γίνεται, εἶναι μικρότερον τοῦ ἑνὸς δεκάκις χιλιοστοῦ, καὶ ὁ ἀριθμὸς 0,0174 λέγεται *πηλίκον κατὰ προσέγγισιν κατ' ἔλλειψιν*, διότι εἶναι μικρότερον τοῦ ἀληθοῦς κατὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ δεκάκις χιλιοστοῦ. Ἐὰν ὅμως, ἀντὶ νὰ παραλείψωμεν τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ δεκάκις χιλιοστοῦ, προσθέσωμεν εἰς ταῦτα, ὅπερ προτιμότερον, καὶ $\frac{1}{5}$ τοῦ δεκάκις χιλιοστοῦ, λάβωμεν δὲ ὡς πηλίκον τὸν ἀριθμὸν $0{,}0174\frac{5}{5}$ ἤτοι 0,0175, τότε οὗτος, ἐπειδὴ ὑπερβαίνει τὸ ἀληθὲς πηλίκον κατὰ $\frac{1}{5}$ τοῦ δεκάκις χιλιοστοῦ, λέγεται *πηλίκον κατὰ προσέγγισιν καθ' ὑπεροχήν*. Εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις τὸ λάθος εἶναι μικρότερον τοῦ ἑνὸς δεκάκις χιλιοστοῦ. Προτιμότερον ὅμως εἶναι, ἐὰν τὸ κλάσμα, τὸ ὁποῖον μένει, εἶναι μικρότερον τοῦ $\frac{1}{2}$, νὰ παραλείπωμεν αὐτὸ καὶ νὰ λαμβάνωμεν τὸ πηλίκον κατ' ἔλλειψιν· ἐὰν δὲ εἶναι μεγαλείτερον τοῦ $\frac{1}{2}$, ὡς τὸ $\frac{4}{5}$, ἀντὶ νὰ παραλείπωμεν τοῦτο ν' αὐξάνωμεν, ὥστε νὰ γίνεται μία μονὰς τῆς τελευταίας τάξεως, καὶ τότε τὸ λάθος εἶναι μικρότερον ἡμισείας μονάδος τῆς τελευταίας τάξεως

Εἰς τὴν ἀνωτέρω διαίρεσιν ἠδυνάμεθα τὸ ὑπόλοιπον 4, ὅπερ εἶναι δεκάκις χιλιοστά, νὰ τρέψωμεν εἰς 40 ἑκατοντάκις χιλιοστά, τὰ ὁποῖα διαιροῦντες διὰ 5 εὑρίσκομεν 8 ἑκατοντάκις χιλιοστὰ καὶ ὑπόλοιπον 0· ὥστε θὰ ἔχωμεν 0,0874 : 5=0,01748.

* Περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα.

195. Νὰ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 8,74 διὰ τοῦ 7.

$$\begin{array}{l|l} 8{,}74 & 7 \\ \hline 1\;7 & 1{,}24857142\ldots \\ \;\;34 & \\ \;\;\;60 & \\ \;\;\;\;40 & \\ \;\;\;\;\;50 & \\ \;\;\;\;\;\;10 & \\ \;\;\;\;\;\;\;30 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;20 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;6 & \end{array}$$

Εἰς τὴν διαίρεσιν ταύτην τὸ πηλίκον κατὰ τὰ ἀνωτέρω εἶναι $1{,}24\frac{6}{7}$. Τὸ ὑπόλοιπον ὅμως τῆς μερικῆς διαιρέσεως τῶν 34 ἑκατοστῶν διὰ 7, ὅπερ εἶναι 6 ἑκατοστά, δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν εἰς 60 χιλιοστά, τὰ ὁποῖα διὰ 7 δίδουν πηλίκον 8 χιλιοστὰ καὶ ὑπόλοιπον 4 χιλιοστά. Τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν εἰς 40 δεκάκις χιλιοστά, τὰ ὁποῖα δι' 7 δίδουν πηλίκον 5 καὶ ὑπόλοιπον 5. Τὸ νέον τοῦτο ὑπόλοιπον δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν εἰς 50 ἑκατοντάκις χιλιοστὰ καὶ νὰ ἐξακολουθήσωμεν τὴν διαίρεσιν, ἡ ὁποία ἄλλοτε μὲν καταλήγει εἰς ὑπόλοιπον 0, καὶ τότε τὸ πηλίκον ἔχει ὡρισμένον πλῆθος δεκαδικῶν ψηφίων, ἄλλοτε δὲ οὐδέποτε εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 0, καὶ τότε ἡ διαίρεσις ἐξακολουθεῖ ἐπ' ἄπειρον, τὰ δὲ ψηφία τοῦ πηλίκου ἐπαναλαμβάνονται τὰ αὐτὰ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν, ὡς συμβαίνει εἰς τὴν ἀνωτέρω διαίρεσιν, εἰς τὴν ὁποίαν μετὰ τὸ ἕβδομον ψηφίον τὰ δεκαδικὰ ἄρχονται ἐπαναλαμβανόμενα ἀπὸ τοῦ 2 κατὰ τὴν αὐτὴν σειράν. Τὸ τοιοῦτον πηλίκον λέγεται **περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα**. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι ἀδύνατον νὰ λάβωμεν ὅλα τὰ ψηφία τοῦ δεκαδικοῦ τούτου, λαμβάνομεν αὐτὸν πάντοτε κατὰ προσέγγισιν.

Παρατήρησις. Εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα, ἐὰν περιορισθῶμεν εἴς τινα μερικὴν διαίρεσιν, π. χ. εἰς τὴν τετάρτην, ἤτοι ἐὰν λάβωμεν τὸ πηλίκον μέχρι τῶν χιλιοστῶν, θὰ ἔχωμεν αὐτὸ ὑπὸ τὴν μορφὴν $1{,}248\frac{4}{7}$, θὰ εἶναι δὲ $1{,}248\frac{4}{7} = 1{,}2485714248\ldots$

Ἐὰν ὡς πηλίκον λάβωμεν τὸν 1,248, τὸ λάθος εἶναι $\frac{4}{7}$ τοῦ χιλιοστοῦ, ἑπομένως μικρότερον τοῦ ἑνὸς χιλιοστοῦ. Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν ὅτι, ἐὰν καὶ τοῦ δεκαδικοῦ 1,2485714248... λάβωμεν τὰ τρία πρῶτα δεκαδικά, τὸ λάθος εἶναι μικρότερον τοῦ ἑνὸς χιλιοστοῦ, ἑπομένως τὰ παραλειπόμενα ἀπὸ τοῦ τετάρτου καὶ ἐφεξῆς ἐν συνόλῳ δὲν ἔχουν ἀξίαν ἑνὸς χιλιοστοῦ. Ἐνταῦθα ἡ ἀξία των εἶναι $\frac{4}{7}$ τοῦ χιλιοστοῦ. Ὁμοίως ἐὰν λάβωμεν τὸ πηλίκον τῆς ἀνωτέρω διαιρέσεως μέχρι τῶν δεκάκις χιλιοστῶν, ἤτοι ὑπὸ τὴν μορφὴν $1{,}2485\frac{5}{7}$, θὰ ἔχωμεν

$$1{,}2485\tfrac{5}{7} = 1{,}24857142\ldots$$

Ἀποδεικνύομεν δέ, ὅπως ἀνωτέρω, ὅτι, ἐὰν τοῦ δεκαδικοῦ τοῦ ἔχοντος ἄπειρα ψηφία λάβωμεν τὰ τέσσαρα πρῶτα δεκαδικά, ἤτοι μέχρι τῶν δεκάκις χιλιοστῶν, τὸ λάθος εἶναι $\frac{5}{7}$ τοῦ δεκάκις χιλιοστοῦ, ἑπομένως ὅλα τὰ παραλειπόμενα δεκαδικὰ ψηφία ἔχουν ἀξίαν μικροτέραν τοῦ ἑνὸς δεκάκις χιλιοστοῦ.

196. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὰ ἑξῆς:

Ἐὰν δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ ἔχοντος πολλὰ δεκαδικὰ ψηφία ἢ ἄπειρον πλῆθος τοιούτων λάβωμέν τινα τούτων μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν καὶ παραλείψωμεν ὅλα τὰ ἑπόμενα, ἡ ἀξία τῶν παραλειπομένων, ἤτοι τὸ λάθος εἶναι μικρότερον μιᾶς μονάδος τῆς τελευταίας τάξεως τοῦ δεκαδικοῦ, τὸν ὁποῖον ἐλάβομεν.

Διαίρεσις δεκαδικοῦ διὰ δεκαδικοῦ.

199. Ἔστω πρὸς ἐκτέλεσιν ἡ διαίρεσις τοῦ ἀριθμοῦ 57,354 **διὰ** 8,3. Πηλίκον τῶν δύο τούτων ἀριθμῶν δύναται νὰ ληφθῇ **τὸ κλάσμα** $\frac{57{,}354}{8{,}3}$, τοῦ ὁποίου, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο ὅρους **ἐπὶ** 10, ἵνα ὁ παρονομαστὴς γίνῃ ἀκέραιος, εὑρίσκομεν τὸ ἴσον **κλάσμα** $\frac{573{,}54}{83}$, ὁπότε θὰ ἔχωμεν νὰ ἐκτελέσωμεν διαίρεσιν δεκαδικοῦ **δι' ἀ**κεραίου, ἤτοι τὴν 573,54 : 83, ἥτις ἐκτελεῖται, ὅπως **ἀνωτέρω** εἴδομεν, καὶ εὑρίσκεται πηλίκον 6,91 κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς ἑκατοστοῦ.

Ἔστω δεύτερον πρὸς ἐκτέλεσιν ἡ διαίρεσις 3,674 : 9,531· **τὸ** πηλίκον εἶναι $\frac{3{,}674}{9{,}531} = \frac{3674}{9531} = 0{,}385$ κατὰ προσέγγισιν χιλιοστοῦ.

Εἰς τὴν διαίρεσιν ταύτην, διὰ νὰ κάμωμεν τὸν διαιρέτην ἀκέραιον, ἐπολλαπλασιάσαμεν τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{3674}{9531}$, ἤτοι διαιρετέον καὶ διαιρέτην ἐπὶ 1 000 καί, ἐπειδὴ ἔχουν ἴσον **ἀ**ριθμὸν δεκαδικῶν ψηφίων, ἔγιναν ἀμφότεροι ἀκέραιοι, τοὺς ὁποίους διαιροῦμεν, ὡς ἐδείξαμεν ἀνωτέρω.

Ἔστω τέλος ἡ διαίρεσις 0,75 : 3,459. Εἰς τὴν διαίρεσιν ταύτην διὰ νὰ γίνῃ ὁ διαιρέτης ἀκέραιος, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν διαιρετέον καὶ διαιρέτην ἐπὶ 1 000· ἐπειδὴ δὲ ὁ διαιρετέος **δὲν** ἔχει ἀρκετὰ δεκαδικά, γράφομεν πρῶτον εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ **ἓν** μηδενικόν· οὕτω θὰ ἔχωμεν τὴν διαίρεσιν 0,750 : 3,459 ἢ **τὴν** 750 : 3 459. Τὸ πηλίκον κατὰ προσέγγισιν καθ' ὑπεροχὴν χιλιοστοῦ εἶναι 0,217. Ὁμοίως ἐκτελεῖται ἡ διαίρεσις 0,65 : 1,8374. Ἐὰν γράψωμεν εἰς τὸ τέλος τοῦ διαιρετέου 0,65 δύο **μηδενικὰ καὶ** πολλαπλασιάσωμεν διαιρετέον καὶ διαιρέτην ἐπὶ 10 000, ἡ διαίρεσις αὕτη τρέπεται εἰς τὴν ἑξῆς· 6 500 : 18 374, ἥτις ἐκτελεῖται εὐκόλως.

Ὡσαύτως ἐκτελεῖται καὶ ἡ διαίρεσις 5 : 0,467. Ἐνταῦθα ὁ διαιρετέος εἶναι ἀκέραιος· ἐὰν γράψωμεν δεξιὰ αὐτοῦ ὑποδιαστολὴν καὶ κατόπιν ταύτης μηδενικά, ἡ ἀξία αὐτοῦ δὲν βλάπτεται· οὕτω θὰ ἔχωμεν νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν 5,000 : 0,467, ἢ τὴν 5 000 : 467, τὴν ὁποίαν εὐκόλως ἐκτελοῦμεν.

Δεκαδικὸν πηλίκον δύο ἀκεραίων.

197. Ὅταν ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν δύο ἀκεραίους, οἷον 23 διὰ 4, τὸ πηλίκον, καθὼς γνωρίζομεν, θὰ εἶναι $\frac{23}{4}$ ἢ $5\,\frac{3}{4}$, ἤ, ἂν περιορισθῶμεν εἰς τὸ ἀκέραιον μόνον μέρος, θὰ εἶναι 5. Δυνάμεθα ὅμως νὰ ἐξακολουθήσωμεν τὴν διαίρεσιν τρέποντες τὸ πρῶτον ὑπόλοιπον καὶ ἕκαστον τῶν ἀκολούθων εἰς μονάδας κατωτέρας τάξεως καὶ οὕτω λαμβάνομεν τὸ πηλίκον ὑπὸ μορφὴν δεκαδικοῦ.

Παραδείγματα.

Παράδειγμα 1ον. Εἰς τὴν διαίρεσιν 567 : 68 μετὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ ἀκεραίου πηλίκου 8 ἐτράπη τὸ ἀκέραιον ὑπόλοιπον 32 εἰς 320 δέκατα καὶ τὸ ἑπόμενον ὑπόλοιπον 48 δέκατα ἐτράπη εἰς 480 ἑκατοστὰ καὶ τὸ ἑπόμενον 4 ἑκατοστὰ εἰς 40 χιλιοστά, εὕρομεν δὲ πηλίκον 8,470 χιλιοστὰ κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς χιλιοστοῦ.

576	68
320	8,470
480	
040	

Παράδειγμα 2ον. Ἔστω πρὸς τούτοις ἡ διαίρεσις 7 : 16. Ἐπειδὴ ὁ ἀκέραιος 7 δὲν διαιρεῖται διὰ 16, θέτομεν 0 εἰς τὸ πηλίκον ὡς ἀκέραιον μέρος καὶ τρέπομεν τὸν ἀκέραιον 7 εἰς 70 δέκατα καὶ οὕτως ἐξακολουθοῦντες μέχρι τῶν δεκάκις χιλιοστῶν εὑρίσκομεν πηλίκον 0,4375 ἀκριβῶς.

70	16
060	0,4375
120	
080	
00	

Τροπὴ κλάσματος εἰς δεκαδικόν.

198. Ὅπως εὑρίσκομεν τὸ δεκαδικὸν πηλίκον δύο ἀκεραίων, καθ᾽ ὅμοιον τρόπον τρέπομεν πᾶν κοινὸν κλάσμα, οἷον $\frac{5}{6}$, εἰς ἰσοδύναμον δεκαδικόν, δηλ. διαιροῦντες τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ καὶ τρέποντες τὸ ἑκάστοτε ὑπόλοιπον εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας δεκαδικῆς ὑποδιαιρέσεως.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα:

200. *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀκέραιον ἢ δεκαδικὸν διὰ δεκαδικοῦ, πολλαπλασιάζομεν διαιρετέον καὶ διαιρέτην ἐπὶ 10 ἢ 100 ἢ 1000 ἢ ἐν γένει ἐπὶ τὴν μονάδα ἀκολουθουμένην ὑπὸ τόσων μηδενικῶν, ὅσα εἶναι τὰ δεκαδικὰ ψηφία τοῦ διαιρέτου, καὶ οὕτω τρέπομεν τὴν διαίρεσιν εἰς διαίρεσιν δι' ἀκεραίου. Δεξιὰ τοῦ διαιρετέου ἐν ἀνάγκῃ δυνάμεθα νὰ γράψωμεν ὁσαδήποτε μηδενικὰ ὡς δεκαδικά.*

* Συντομίαι περὶ τὴν ἐκτέλεσιν πράξεών τινων.

201. Ἔστω πρὸς ἐκτέλεσιν ὁ πολλαπλασιασμός 38×5. Ἐπειδὴ $5 = \frac{10}{2}$, λαμβάνομεν $38 \times 5 = \frac{38 \times 10}{2}$, ὅθεν

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμόν τινα ἐπὶ 5, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν πρῶτον ἐπὶ 10 καὶ λαμβάνομεν ἔπειτα τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τούτου.

202. Ἔστω πρὸς ἐκτέλεσιν ὁ πολλαπλασιασμὸς 132×25· ἐπειδὴ $25 = \frac{100}{4}$, θὰ εἶναι καὶ $132 \times 25 = \frac{132 \times 100}{4}$, ὅθεν

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμόν τινα ἐπὶ 25, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν πρῶτον ἐπὶ 100 καὶ διαιροῦμεν ἔπειτα διὰ 4.

203. Ἔστω πρὸς ἐκτέλεσιν ὁ πολλαπλασιασμὸς 57×125· Ἐπειδὴ $125 = \frac{1000}{8}$, ἕπεται ὅτι $57 \times 125 = \frac{57 \times 1000}{8}$, ὅθεν

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμὸν ἐπὶ 125, πολλαπλασιάζομεν πρῶτον ἐπὶ 1000 καὶ διαιροῦμεν ἔπειτα διὰ 8.

204. Ἔστω πρὸς ἐκτέλεσιν ἡ διαίρεσις

$$326 : 20 = \frac{326}{20} = \frac{32{,}6}{2} \quad \text{καὶ ἡ} \quad 326 : 60 = \frac{326}{60} = \frac{32{,}6}{6} \text{ ὅθεν:}$$

Ὅταν ὁ διαιρέτης ἔχῃ κατόπιν αὐτοῦ μηδενικά, ἐξαλείφομεν ταῦτα καὶ χωρίζομεν ἐκ τοῦ διαιρετέου τόσα ψηφία ὡς δεκαδικά, ὅσα εἶναι τὰ διαγραφέντα μηδενικά, μετὰ δὲ ταῦτα διαιροῦμεν τοὺς οὕτω προκύπτοντας ἀριθμούς.

205. Ἔστω πρὸς ἐκτέλεσιν ἡ διαίρεσις $1532 : 25$. Ἐπειδὴ

$$1532 : 25 = \frac{1532}{25} = \frac{1532 \times 4}{25 \times 4} = \frac{1532 \times 4}{100}, \text{ ἕπεται ὅτι,}$$

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα διὰ 25, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ 4 καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν διὰ τοῦ 100.

206. Ἔστω πρὸς ἐκτέλεσιν ἡ διαίρεσις 1756 : 125. Ἐπειδὴ

$$1756 : 125 = \frac{1756}{125} = \frac{1756 \times 8}{125 \times 8} = \frac{1756 \times 8}{1000},$$ ἕπεται ὅτι,

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα διὰ τοῦ 125, πολλαπλασιάζομεν πρῶτον ἐπὶ 8 καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν διὰ 1000.

207. *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμόν τινα ἐπὶ 0,5 λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ τούτου, ἤτοι διαιροῦμεν διὰ τοῦ 2.* Διότι

$$0,5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2},$$ ἑπομένως $12 \times 0,5 = 12 \times \frac{1}{2} = \frac{12}{2}$.

208. *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμόν τινα ἐπὶ 0,25, λαμβάνομεν τὸ τέταρτον, ἤτοι διαιροῦμεν αὐτὸν διὰ 4.* Διότι

$$0,25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4},$$ ἑπομένως $48 \times 0,25 = 48 \times \frac{1}{4} = \frac{48}{4}$

209. *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμὸν ἐπὶ 0,125, λαμβάνομεν τὸ ὄγδοον αὐτοῦ, ἤτοι διαιροῦμεν διὰ τοῦ 8.* Διότι

$$0,125 = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8},$$ ὅθεν $48 \times 0,125 = 48 \times \frac{1}{8} = \frac{48}{8}$.

210. *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα διὰ 0,5, πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 2.* Διότι

$$4 : 0,5 = 4 : \frac{1}{2} = 4 \times 2.$$

211. *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα διὰ 0,25, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ 4.* Διότι

$$12 : 0,25 = 12 : \frac{1}{4} = 12 \times 4.$$

212. *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα διὰ 0,125, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ 8.* Διότι

$$64 : 0,125 = 64 : \frac{1}{8} = 64 \times 8.$$

Ἀσκήσεις.

Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑξῆς πράξεις κατὰ τὰ ἀνωτέρω:

$5,635+\frac{23}{3}=;$ $0,734+\frac{13}{8}=;$ $3,5034+50,032=;$
$1,135+0,0389=;$ $5,817+9,5=;$ $1,5-0,038=;$
$3,5-0,008=;$ $72,54-9,459=;$ $7,504-5,7=;$
$0,058-0,004=;$ $1-0,579=;$ $1-0,879=;$
$5,342-2,629=;$

Σημείωσις. Αἱ ἀνωτέρω ἀφαιρέσεις νὰ ἐκτελεσθῶσι καὶ διὰ τῆς προσθέσεως.

$3,852\times0,54=;$ $5,304\times0,25=;$ $3\times0,08=;$
$1,564\times3,52=;$ $3,48\times0,5=;$ $3,25\times25=;$
$0,128\times0,25=;$ $8,534:6700=;$ $0,256\times125=;$
$0,024\times0,25=;$ $24,64\times6,125=;$ $8:15,025=;$
$3,168:125=;$ $5,07\times\frac{1}{0,25}=;$ $2:11=;$ $\frac{3}{8}=;$

ΠΕΡΙ ΝΟΜΙΣΜΑΤΩΝ

Καθαρότης ἢ τίτλος νομίσματος.

213. Τὰ χρυσᾶ καὶ τὰ ἀργυρᾶ νομίσματα δὲν περιέχουσιν ἐντελῶς γνήσιον τὸν χρυσὸν ἢ τὸν ἄργυρον, δηλ. τὸ πολύτιμον μέταλλον, ἀλλὰ καὶ μικρὰν ποσότητα χαλκοῦ ἢ καὶ ἄλλου τινὸς ἀσημάντου μετάλλου. Ὁ ἀριθμός, ὅστις δεικνύει τὴν εἰς τὴν μονάδα τοῦ βάρους τοῦ νομίσματος περιεχομένην ποσότητα πολυτίμου μετάλλου, λέγεται **καθαρότης** ἢ **τίτλος** τοῦ νομίσματος, π. χ. ὅταν λέγωμεν, ὅτι ἡ καθαρότης εἶναι 0,835, τοῦτο σημαίνει, ὅτι εἰς ἓν γραμμάριον τὸ 0,835 τοῦ γραμμ. εἶναι πολύτιμον μέταλλον, τὸ δὲ ὑπόλοιπον ἄλλο τι ἀσήμαντον μέταλλον, ἢ ὅτι εἰς 1000 γραμμάρια τοιούτων νομισμάτων τὰ 835 γραμμ. εἶναι πολύτιμον μέταλλον.

Νομίσματα τῆς Λατινικῆς ἑνώσεως.

214. Κατὰ διαφόρους χρόνους καὶ τελευταῖον κατὰ τὸ 1885 τὰ κράτη Ἑλλάς, Γαλλία, Ἰταλία, Ἑλβετία καὶ Βέλγιον, ὅπως διευκολύνωσι τὸ διεθνὲς ἐμ-

πόριον καὶ τὰς συναλλαγάς, ἔκαμαν σύμβασιν, ὅπως κόπτωσι νομίσματα τοῦ αὐτοῦ μεγέθους καὶ τῆς αὐτῆς καθαρότητος καὶ ἀξίας. Μονὰς νομισματικὴ εἰς τὴν ἕνωσιν ταύτην εἶναι τὸ φράγκον. Νομισματικὰ δὲ κερμάτια, ἐκτὸς ἄλλων (ἰδὲ Παράρτημα) εἶναι τὰ ἑξῆς:

	ἀξία εἰς φράγκα	*βάρος γραμμ.*	*τίτλος*
Εἰκοσάφραγκον (χρ.)	20	6,4516	0,900
Φράγκον (ἀργ.)	1	5	0,835

Εἰς ἑκάστην πληρωμὴν κατὰ νόμον εἶναι ὑποχρεωτικὴ ἡ παραδοχὴ φράγκων ἀργυρῶν μέχρι 50· εἰς μεγαλειτέρας ὅμως πληρωμὰς δύναταί τις νὰ ἀπαιτήσῃ χρυσᾶ νομίσματα.

Κατὰ τὸ σύστημα τοῦτο, ἂν ἔχωμεν ἀργυρᾶ νομίσματα μὲ ὡρισμένον βάρος καὶ ἀξίαν καὶ θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν ἀξίαν ἴσου βάρους χρυσῶν νομισμάτων, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὴν ἀξίαν τῶν ἀργυρῶν 15,5. Μεταξὺ ἀργυρῶν καὶ χαλκῶν νομισμάτων ἴσου βάρους ἡ ἀξία τῶν ἀργυρῶν εἶναι 20 φορὰς μεγαλειτέρα τῶν χαλκῶν.

Ἐπειδή, καθὼς ἀνωτέρω βλέπομεν, ὅτι 5 γραμμ. νομισματοποιηθέντος ἀργύρου εἶναι 1 φρ.,

1 γραμμ. ἀργυροῦ νομίσματος ἀξίζει $\frac{1}{5}=0,20$ φρ.
ὅθεν 1 » χρυσοῦ » » $0,20\times15,5=3,10$ φρ.
καὶ 1 » χαλκοῦ » » 20 φορὰς ὀλιγώτερον τοῦ ἀργυροῦ, ἤτοι $0,20 : 20=0,01$ τοῦ φρ.

Ἐκ τούτων εἶναι εὔκολον νὰ εὕρωμεν τὴν ἀξίαν νομισμάτων χρυσῶν ἢ ἀργυρῶν ἢ χαλκῶν τῆς Λατινικῆς ἑνώσεως ἐκ τοῦ βάρους αὐτῶν ὡς ἑξῆς:

Ἐὰν τὰ νομίσματα εἶναι χρυσᾶ βάρους 25 γραμμ., λέγομεν:

ἐπειδὴ 1 γραμμ. ἀξίζει 3,10 φρ.
τὰ 25 » ἀξίζουν $3,10\times25=77,50$ φρ.

Ἐὰν τὰ νομίσματα εἶναι ἀργυρᾶ καὶ τὸ βάρος αὐτῶν 159 γραμμ.:

ἐπειδὴ 1 γραμμ. ἀργ. νομίσμ. ἀξίζει 0,20 φρ.,
τὰ 150 » » » θὰ ἀξίζουν $0,20\times150=30$ φρ.

Νομίσματα ἐκ τῶν ἐν χρήσει

Ἐν Τουρκίᾳ

	ἀξία εἰς γρόσ.	ἀξία εἰς φρ.	βάρος γραμμ.	τίτλος
1 λίρα χρ.	100 γρόσ. χρ.	22,78	7,216	0,91666
1 μετζήτιον ἀργ	20 γρόσ. ἀργ.	4,22	24,055	0,830
1 γρόσ. ἀργ.	1 μονάς=40 παρ.	0,21	$1,202\frac{1}{2}$	0,830

Ἡ λίρα, τό μετζήτιον καὶ τὸ γρόσιον εἰς τὰς διαφόρους ἐπαρχίας τοῦ **κράτους** λαμβάνονται ἐν τῷ ἐμπορίῳ μὲ διάφορον ἀξίαν. (Ἰδὲ Παράρτημα)

Εἰς τὰς πλείστας ἐπαρχίας καὶ ἐν Κωνσταντινουπόλει ἡ ἀγοραία τιμὴ **τῆς** τουρκικῆς λίρας εἶναι 108 γρόσ. ἀργ., τοῦ δὲ μετζητίου 20 γρόσ. ἀργ.

Σημ. Ἐν τοῖς ἑπομένοις, ὅταν πρόκηται περὶ ἀργυρῶν γροσίων, θὰ γράφωμεν ἁπλῶς **γρόσια** ἢ **γρόσ.**, ὅταν δὲ πρόκηται περὶ χρυσῶν γροσίων, θὰ γράφωμεν **γρόσια χρ.** ἢ **γρόσ. χρ.**

Ἐν Ἀγγλίᾳ.

ὄνομα	ἀξία	ἀξία εἰς φρ.	γρόσια	γραμμάρ.	τίτλος
λίρα στερλίνα	20 σελίνια	25,22	120	7,988	0,91666
1 σελίνιον χρ.	μονὰς	1,26	6		»
1 σελίνιον ἀργ.	μονὰς	1,16		5,655	0,925
1 πέννα ἀργ.	$\frac{1}{12}$ σελ.	$0,09\frac{1}{2}$		0,471	»

Σημ. 1 λίρα ἀγγλ. ἔχει 20 σελίνια· ἓν σελίν. ἔχει 12 πέννας καὶ 1 πέννα 4 φαρδίνια (νόμισμα χάλκινον).

Ἐν Αὐστρίᾳ

Εἰκοσάφραγκον	8 φιορ. χρ.	20	95	6,4516	0,900
Δουκᾶτον, κριμίτσα	4,715 φιορ.	11,85	56	3,491	$0,986\frac{1}{9}$
Φιορίνιον χρ.	μονὰς	2,50	$11,87\frac{1}{2}$		
» ἀργ.	μονὰς =100 Κρόϊτσερ	2,47	11,73	12,345	0,900

Ἐν Γερμανίᾳ

20 μάρκα χρ.		24,69	117,28	7,965	0,900
1 μάρκον χρ.	μονὰς(100	$1,23\frac{1}{2}$	5,86		»
1 » ἀργ.	μονὰς(φένιγκ	1,11	$5,27\frac{1}{2}$	5,556	»

Ἐν Ρωσσίᾳ

Εἰκοσάφραγκον	7,5 ρούβ. χ.	20	95	6,4518	0,900
1 ρούβλιον χρ.	μονὰς χρ.	2,66	12,66		»
1 » ἀργ.	μονὰς ἀργ.	2,66	12,66	20	»
Καπίκιον	$\frac{1}{100}$ ρούβλ.				

Σημ. **Αἱ** ἀνωτέρω οριζόμεναι τιμαὶ τῶν νομισμάτων εἰς τὸ ἐμπόριον **κατ** τὰς ἄλλας συναλλαγὸς μεταβάλλονται καθ' ἑκάστην ἀναλόγως τῶν ἀπαιτήσεων τῆς ἀνάγκης.

Ἡ Ἱσπανία, ἡ Σερβία, ἡ Ῥουμανία, ἡ Βουλγαρία καὶ ἄλλα τινὰ κράτη ἔχουσι σύστημα νομισματικὸν τὸ τῆς Λατινικῆς ἑνώσεως (ἰδὲ Παράρτημα) μὲ μονάδα τὸ φράγκον, εἰς τὸ ὁποῖον δίδουσι διάφορα ὀνόματα.

Προσθήκη. Πρὸς εὔκολον μετατροπὴν τῶν διαφόρων νομισμάτων καλὸν εἶναι νὰ ἐνθυμώμεθα, ὅτι 20 φρ. χρ. ἰσοδυναμοῦν πρὸς 95 γρόσ. ἀργ. ἢ 87,96 γρόσ. χρ. ἢ 8 φιορ. χρ. ἢ 7,5 ρούβλ. χρ. ἢ 16,20 μάρκα ἢ 15,86 σελίν. περίπου. Ὅθεν ἕπεται, ὅτι 1 φρ. = 4,75 γρόσ ἀργ., ἢ 4,398 γρόσ. χρ. = 0,40 φιορ = 0,37 ½ ρούβλ. = 0,81 μάρκα = 0,793 σελίν.

Παρατήρησις. Παντὸς νομισματικοῦ συστήματος μονὰς θεωρεῖται τὸ χρυσοῦν νόμισμα· οὕτω μονὰς ἐν Τουρκίᾳ εἶναι τὸ ἓν χρυσοῦν γρόσιον, τοῦ ὁποίου κερμάτιον δὲν ὑπάρχει, ὑπάρχει ὅμως ἡ λίρα περιέχουσα 100 γρόσ. χρ. Το ἀργυροῦν γρόσιον ἔχει ἀξίαν μικροτέραν τοῦ χρυσοῦ. Ὁμοίως ἐν Ἀγγλίᾳ μονὰς εἶναι τὸ χρυσοῦν σελίνιον, τοῦ ὁποίου κερμάτιον δὲν ὑπάρχει· ὑπάρχει ὅμως ἡ λίρα περιέχουσα 20 σελίνια χρυσᾶ. Ὁμοίως τὸ χρυσοῦν φράγκον, τὸ μάρκον, τὸ ρούβλιον δὲν ὑπάρχουσι κτλ. Πρὸς εὐκολίαν τῶν συναλλαγῶν ἐκόπησαν τοιαῦτα ἀργυρᾶ, τῶν ὁποίων ἐπὶ πληρωμῶν ἡ παραδοχὴ ἀντὶ χρυσῶν εἶναι ὑποχρεωτικὴ διὰ νόμου· τῶν μὲν ἀργυρῶν φιορινίων καὶ ρουβλίων μέχρις οἱουδήποτε ποσοῦ, τῶν δὲ ἀργυρῶν σελινίων μέχρι 40, τῶν μάρκων μέχρι 20, καὶ τῶν φράγκων μέχρι 50. Πᾶσα ὑπερτέρα πληρωμὴ πρέπει νὰ γίνηται κατὰ νόμον εἰς χρυσᾶ νομίσματα.

Εἰς τὰς διεθνεῖς συναλλαγὰς λαμβάνεται πάντοτε σχεδὸν ὑπ' ὄψιν ἡ ἀξία τῶν χρυσῶν νομισμάτων.

Σχέσεις πρὸς τὸ μέτρον τῶν διαφόρων γραμμικῶν μονάδων.

Μονάδες μήκους (ἰδὲ ἐδ. 172)

1 μέτρον = 10 παλάμαι = 100 δάκτυλοι

1 παλάμη = 10 δάκτυλοι

ἀρσὶν = 0,67 ἢ ἀκριβέστερον 0,669 τοῦ μέτρου

(~~πῆχυς ἐνδεζὲ = 0,65 ἢ ἀκριβέστερον 0,648 »~~)

(ὁ Ρωσσικὸς ἀρσὶν = 0,71)

τεκτον. πῆχυς = 0,75 τοῦ μέτρου

ὑάρδα = 0,91 ἢ ἀκριβέστερον 0,91439 τοῦ μέτρου
ὀργυιὰ = 6 πόδες = 1,95 μέτρ. ἢ ἀκριβέστερον 1,94904 μέτρα
1 ποῦς = 12 δάκτ.
1 δάκτ. = 12 γραμμαί.
Τὰς μονάδας τῶν μεγάλων ἀποστάσεων ἰδὲ ἐδ. 173 σελ. 107·

Μονάδες ἐπιφανείας καὶ σχέσεις αὐτῶν πρὸς τὸ τετραγωνικὸν μέτρον καὶ πρὸς ἀλλήλας.

1 τετρ. μέτρον = 100 τετρ. παλάμαι ἢ 10000 τετρ. δάκτυλοι
1 τετρ. τεκτον. πῆχ. = 0,5625 τετρ. μέτρ. ἢ $\frac{9}{16}$ τετρ. μέτρ.
1 τετρ. πῆχ. ἐνδεζὲ = 0,42 τετρ. μέτρ. ἢ ἀκριβέστερον 0,4199 τετρ. μέτρ.
1 ἄρ. = 100 τετρ. μέτρα.
1 στρέμμα νέον = 1000 τετρ. μέτρ. ἢ 10 ἄρ.
1 στρέμμα παλαιὸν = 1270 τετρ. μέτρ.
1 ἑκτάριον = 10000 τετρ. μέτρ. ἢ 100 ἄρ, ἢ 10 στρ. νέα.
1 στρέμμ. παλαιὸν = 1,27 στρέμμ. νέα.
1 στρέμμ. νέον = 0,787 στρέμμ. παλαιά.

Μονάδες χωρητικότητος (ἰδὲ ἐδ. 175)

Μονάδες βάρους καὶ σχέσεις αὐτῶν πρὸς τὸ χιλιόγραμμον καὶ πρὸς ἀλλήλας:

1 τόννος = 1000 χγ. ἢ 781,25 ὀκ.
1 χγ. = 1000 γραμμ. ἢ 312,5 δράμ., ὅθεν 1 γραμμ. = 0,3125 δράμ.
1 δράμιον = 3,2 γραμμ., ὅθεν 5 δράμ. = 16 γραμμ.
1 ὀκὰ = 1280 γραμμ., ἤτοι 1,28 χγ.
1 χγ. = 0,78 ὀκ. ἢ ἀκριβέστερον 0,78125 ὀκ., ἤτοι 0,78 $\frac{1}{8}$ ὀκ.
1 στατὴρ = 56,32 χγ.
1 τσεκίον εἶναι ἴσον πρὸς $\frac{1}{4}$ τοῦ τόννου, ἤτοι 250 χγ. ἢ 195,31 ὀκ...

Ἐν Ρωσσίᾳ μονὰς βάρους εἶναι τὸ πούτιον, ὅπερ ἰσοῦται πρὸς 12,77 ὀκ. καὶ τὸ μικρὸν τσεκίον, ὅπερ ἰσοῦται πρὸς 4 στατῆρας, ἤτοι 176 ὀκ.

Ἐν Μυτιλήνῃ πρὸς μέτρησιν τοῦ ἐλαίου μεταχειρίζονται τὸ λαγύνιον. Εἶναι δὲ τὸ λαγύνιον ἴσον μὲ 6,25 ὀκ., ἤτοι 8 χγ.

Ἐν Ἀδραμυττίῳ πρὸς μέτρησιν τοῦ ἐλαίου μεταχειρίζονται τὸ ἀγιάριον. Εἶναι δὲ τὸ 1 ἀγιάριον ἴσον μὲ 9,25 ὀκ., ἤτοι 11,84 χγ. ἢ 1,48 λαγύν.

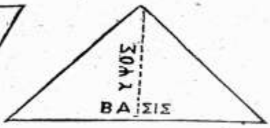
Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ γεωμετρικῶν τινων σχημάτων.

Τετράγωνον

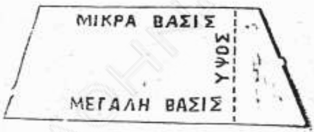
Ὀρθογώνιον

Παραλληλόγραμμον

Τρίγωνον



Τραπέζιον



Τῶν τριῶν πρώτων σχημάτων, καθὼς ἡ γεωμετρία διδάσκει, τὸ ἐμβαδὸν εὑρίσκεται ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὴν βάσιν ἑκάστου ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ· τοῦ δὲ τριγώνου, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὴν βάσιν ἐπὶ τὸ ὕψος καὶ λάβωμεν τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου, καὶ τέλος τοῦ τραπεζίου, ἂν προσθέσωμεν τὰς δύο βάσεις καὶ τὸ ἄθροισμα πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸ ὕψος τὸ δὲ γινόμενον διαιρέσωμεν διὰ 2.

Σημ. Τῶν δύο πρώτων σχημάτων ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος λέγονται συνήθως μῆκος καὶ πλάτος.

Προβλήματα.

Νὰ τραπῶσι 35 παράδες εἰς γρόσια.

Ἐπειδὴ 40 παρ. εἶναι 1 γρόσ.

ὁ 1 παρ. » $\frac{1}{40}$ γροσ.

καὶ οἱ 35 παρ. » $\frac{35}{40}$ γροσ. $= 0,87\frac{1}{2}$ ἢ καὶ 0,875.

Ἐκ τούτου συνάγομεν ὅτι,

Διὰ νὰ τρέψωμεν παράδες εἰς δεκαδικὸν τοῦ γροσίου πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ $\frac{1}{40}$, ἤτοι διαιροῦμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν παράδων διὰ 40, καὶ ἐξακολουθοῦμεν τὴν διαίρεσιν, μέχρις ὅτου εὕρωμεν ὑπόλοιπον 0.

Δυνάμεθα ὅμως νὰ λύσωμεν τὸ αὐτὸ πρόβλημα σκεπτόμενοι ὡς ἑξῆς :

Ἐπειδὴ 40 παρ. εἶναι 100 ἑκατοστὰ τοῦ γροσ. δηλ. $\frac{100}{100}$ γροσ.

ὁ 1 παρ. » $\frac{100}{40} = 2\frac{1}{2}$ ἑκατοστὰ τοῦ γροσ.

καὶ 35 παρ. » $2\frac{1}{2} \times 35 = 35 + 35 + \frac{35}{2}$ ἑκατοστά.

ἤτοι $0,87\frac{1}{2}$ τοῦ γροσ. ἢ 0,875 τοῦ γροσ.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι 20 παράδες εἶναι

$20 + 20 + 10 = 0,50$ τοῦ γροσ. ὅθεν

Διὰ νὰ τρέψωμεν παράδες εἰς δεκαδικὸν τοῦ γροσίου, λαμβάνομεν τὸ διπλάσιον καὶ τὸ ἥμισυ τῶν παράδων καὶ προσθέτομεν ταῦτα. Καὶ ἂν μὲν ὁ ἀριθμὸς τῶν παράδων διαιρῆται διὰ 2 τότε τὸ ἄθροισμα εἶναι ἑκατοστά, ἄλλως εἶναι χιλιοστά.

Σημ. Ὁ τρόπος οὗτος εἶναι συνηθέστατος παρὰ τοῖς ἐμπόροις, οἵτινες ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον ἀποφεύγουσι τὰς διαιρέσεις διὰ μεγάλων ἀριθμῶν.

2) Νὰ τραπῶσι 250 δράμια εἰς δεκαδικὸν τῆς ὀκᾶς.

Τρέπομεν πρῶτον τὰ 250 δράμ. εἰς κλασματικὸν τῆς ὀκᾶς καὶ εὑρίσκομεν $\frac{250}{400}$ ἤτοι $\frac{5}{8}$ καὶ ἔπειτα τοῦτον εἰς δεκαδικόν, ὁπότε εὑρίσκμοεν 0,625 ὀκ.

Ἐκ τούτου συνάγομεν ὅτι,

Διὰ νὰ τρέψωμεν δράμια εἰς ὀκάδας πολλαπλασιάζομεν τὰ δράμια ἐπὶ $\frac{1}{400}$ ἤτοι διαιροῦμεν διὰ τοῦ 400, ἐξακολουθοῦμεν δὲ τὴν διαίρεσιν μέχρις ὅτου εὕρωμεν ὑπόλοιπον 0.

Τὸ αὐτὸ πρόβλημα λύεται καὶ ὡς ἑξῆς :

400 δράμ. εἶναι 1000 χιλιοστὰ τῆς ὀκᾶς δηλ. $\frac{1000}{1000}$ ὀκ.

1 δράμ. εἶναι $\frac{1000}{400} = 2\frac{1}{2}$ χιλιοστὰ τῆς ὀκ.

καὶ 250 δράμ. εἶναι $2\frac{1}{2} \times 250 = 250 + 250 + \frac{250}{2}$ χιλιοστὰ τῆς ὀκ. ἢ 0,625 τῆς ὀκ.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι 153 δράμ. εἶναι $153 + 153 + \frac{153}{2}$ χιλιοστὰ τῆς ὀκᾶς, δηλ. 0,3825 ὀκ

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι,

Διὰ νὰ τρέψωμεν δράμια εἰς δεκαδικὸν τῆς ὀκᾶς, λαμβάνομεν τὸ διπλάσιον καὶ τὸ ἥμισυ τῶν δραμίων καὶ προσθέτομεν. Καὶ ἂν μὲν ὁ ἀριθμὸς τῶν δοθέντων δραμίων διαιρῆται διὰ 2, τὸ ἐξαγό-

μενον θα εἶναι χιλιοστά, ἄλλως θὰ εἶναι δεκάκις χιλιοστὰ τῆς ὀκᾶς.

3) Νὰ τραπῶσιν 7 ρούπια εἰς δεκαδικὸν τοῦ πήχεως.

8 ρούπ. εἶναι 1 πῆχ.

1 » » $\frac{1}{8}$ »

ὅθεν 7 » » $\frac{7}{8} = 0,875$ τοῦ πήχ.

Τοῦτο εὑρίσκομεν καὶ ὡς ἑξῆς·

Ἐπειδὴ ἓν ρούπιον εἶναι $\frac{1}{8} = 0,125$ τοῦ πήχ.

τὰ 7 ρούπια » $0,125 \times 7 = 0,875$ τοῦ πήχ.

Ἐκ τούτων συνάγομεν ὅτι,

Διὰ νὰ τρέψωμεν ρούπια εἰς πήχεις, πολλαπλασιάζομεν ταῦτα ἐπὶ 0,125 ἢ ἐπὶ $\frac{1}{8}$ ἤτοι διαιροῦμεν διὰ τοῦ 8.

4) Νὰ τραπῶσι 0,375 γρόσ. εἰς παράδες.

Ἐπειδὴ 1 γρόσ. ἔχει 40 παρ.

$\frac{1}{1000}$ » » $\frac{40}{1000}$ παρ.

καὶ $\frac{375}{1000}$ » » $\frac{40 \times 375}{1000} = 15$ παρ.

Ἐπειδὴ τὰ γρόσια καὶ οἱ ἀντιστοιχοῦντες εἰς ταῦτα παράδες εἶναι ἀνάλογα, τὸ αὐτὸ πρόβλημα συντομώτερον λύεται οὕτως.

Ἀφοῦ 1 γρόσ. ἔχει 40 παρ.

τὰ 0,375 γρόσ. θὰ ἔχωσι $40 \times 0,375 = 15$ παρ.

5) Νὰ τραπῶσι 5,32 γρόσ. εἰς παρ. Ἀπ. $5,32 \times 40$.

Ἐκ τῆς λύσεως τῶν δύο τούτων προβλημάτων συνάγομεν ὅτι,

Διὰ νὰ τρέψωμεν γρόσια εἰς παράδες, πολλαπλασιάζομεν τὰ γρόσια ἐπὶ 40.

6) Νὰ τρέψωμεν 5,25 ὀκ. εἰς δράμια.

Ἐπειδὴ 1 ὀκ. ἔχει 400 δράμ.

τὸ $\frac{1}{100}$ τῆς ὀκᾶς θὰ ἔχῃ $\frac{400}{100}$

καὶ $\frac{525}{100}$ θὰ ἔχωσι $\frac{400 \times 525}{100} = 2100$ δράμ.

Τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ἐπειδὴ αἱ ὀκάδες εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰ δράμια, τὰ ὁποῖα περιέχουν, λύεται συντομώτερον οὕτω:

1 ὀκ. ἔχει 400 δράμ.

5,25 θὰ ἔχωσι $400 \times 5,25 = 2100$ δράμ.

7) Νὰ τρέψωμεν 0,450 τῆς ὀκ. εἰς δράμια.
Σκεπτόμενοι, ὡς ἀνωτέρω, εὑρίσκομεν $0,450 \times 400 = 180$ δράμ.

8) Νὰ τραπῶσιν 0,375 πήχ. εἰς ρούπια.
Οἱ πήχεις εἶναι ἀνάλογοι, πρὸς τὰ ρούπια, τὰ ὁποῖα περιέχουν· ὅθεν, ἐπειδὴ 1 πῆχ. περιέχει 8 ρούπ.

0,375 πήχ. θὰ περιέχωσι $8 \times 0,375 = 3$ ρούπ.

Ἐκ τῆς λύσεως ὅλων τῶν ἀνωτέρω προβλημάτων συνάγομεν ὅτι,

Διὰ νὰ τρέψωμεν μονάδας τάξεώς τινος εἰς μονάδας κατωτέρας τάξεως, πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν ἀριθμόν, ὅστις δεικνύει πόσας μονάδας τῆς τάξεως, εἰς ἣν τρέπομεν, περιέχει μία τῆς δοθείσης.

Ἀντιστρόφως. *Διὰ νὰ τρέψωμεν μονάδας κατωτέρας τάξεως εἰς ἀνωτέρας, διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις δεικνύει πόσαι μονάδες τῆς δοθείσης τάξεως ἀποτελοῦσι μίαν ἐκείνης, εἰς ἣν τρέπομεν.*

Οἱ δύο οὗτοι κανόνες περιλαμβάνονται εἰς τὸν ἑξῆς γενικόν.

Διὰ νὰ τρέψωμεν μονάδας τάξεώς τινος εἰς μονάδας ἄλλης τάξεως, πολλαπλασιάζομεν ταύτας ἐπὶ τὸν ἀριθμόν, ὅστις δεικνύει μία μονὰς τῆς δοθείσης τάξεως πόσας μονάδας περιέχει ἢ τί μέρος εἶναι μιᾶς μονάδος τῆς τάξεως, εἰς ἣν τρέπομεν.

9) Ἔχει τις 18 ἀγελάδας, ἑκάστη τῶν ὁποίων δίδει 1,50 ὀκ. γάλακτος καθ' ἑκάστην ἐπὶ 250 ἡμέρας· πωλεῖται δὲ τὸ γάλα τοῦτο πρὸς 60 παρ. τὴν ὀκάν. Πόσα γρόσια λαμβάνει ἐκ τοῦ γάλακτος καθ' ὅλον τοῦτο τὸ διάστημα; Ἀπ. 10125

10) Ῥάπτρια πρὸς κατασκευὴν ὑποκαμίσων ἠγόρασεν 62 πήχεις λευκοῦ ὑφάσματος πρὸς 3,50 γρόσ. τὸν πῆχυν, χρειάζεται δὲ δι' ἓν ὑποκάμισον 3,10 μέτρα. Ἐὰν δι' ἕκαστον ὑποκάμισον ὑπολογίζῃ ῥαπτικὰ 15 γρόσ. πόσον θὰ πωλήσῃ ὅλα τὰ ὑποκάμισα, ἵνα λάβῃ τὰ χρήματα, τὰ ὁποῖα ἔδωκε διὰ τὸ ὕφασμα καὶ τὰ ῥαπτικά, καὶ κέρδος μίαν τουρκ. λίραν; Ἀπ. 520 γρόσ.

Ὁδηγία. Εὑρίσκομεν πρῶτον τὴν ἀξίαν τοῦ ὑφάσματος, κατόπιν τρέπομεν τοὺς πήχεις εἰς μέτρα καὶ ἔπειτα εὑρίσκομεν πόσα ὑποκάμισα θὰ κατασκευάσῃ. Εἰς τὰ ῥαπτικὰ δὲ τούτων προσθέτομεν τὴν ἀξίαν τοῦ ὑφάσματος καὶ τὸ κέρδος.

11) Ἠγόρασέ τις 15 κοιλὰ σίτου πρὸς 66,50 γρόσ. τὸ κοιλόν, ἐπλή-

ρωσε δὲ ἀπέναντι $4\frac{3}{4}$ τουρκ. λίρας καὶ $\frac{1}{4}$ τοῦ εἰκοσαφρ. Πόσα γρόσ. θὰ πληρώσῃ ἀκόμη; 'Απ. 460,75

12) Οἰκόπεδον ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου, τοῦ ὁποίου τὸ μὲν μῆκος εἶναι 18,15 μέτρα, τὸ δὲ ὕψος 9,28 μέτρ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ, ἤτοι πόσα τετρ. μέτρα εἶναι ὅλον τὸ οἰκόπεδον;

'Απ. $18,15 \times 9,28 = 168,4320$ τετρ. μέτρ.

Προσθήκη. Νὰ τραπῶσι τὰ 168,43 τετρ. μέτρ. εἰς τετρ. τεκτον. πήχεις.

'Επειδὴ 1 τετρ. μέτρ. εἶναι $\frac{16}{9}$ τετρ. τεκτ. πήχ.

τὰ 168,43 » $\frac{16}{9} \times 168,43 = 299,43...$ τετρ. τεκτ. πήχ.

13) Μαγειρεῖον ἔχει μῆκος καὶ πλάτος τὸ αὐτὸ καὶ ἴσον πρὸς 6 μέτρ., πρόκειται δὲ νὰ στρωθῇ διὰ πλακῶν τετραγωνικῶν, τῶν ὁποίων ἑκάστη ἔχει ἐμβαδὸν 0,05 τοῦ τετρ. μέτρ. Πόσαι πλάκες χρειάζονται πρὸς τοῦτο;

Λύσις. 'Αφοῦ 0,05 τοῦ τετρ. μέτρ. καλύπτονται μὲ 1 πλάκα,

τὰ 5 τετρ. μέτρ. θὰ καλυφθῶσι » 100 πλάκας

καὶ τὸ 1 τετρ. μέτρ, θὰ καλυφθῇ » $\frac{100}{5}$ »

τέλος δὲ 36 τετρ μέτρ. θὰ καλυφθῶσι μὲ $\frac{100 \times 36}{5} = 720$ πλάκας.

Σημ. Τὸ πρόβλημα τοῦτο λύεται ἁπλούστατα διὰ τῆς μετρήσεως· διότι ὅσαι πλάκες χωροῦν εἰς τὸ ἔδαφος τοῦ μαγειρείου, τόσαι θὰ χρειασθῶσιν, ἤτοι ὅσας φορὰς ὁ 0,05 εἰσχωρεῖ εἰς τὸ 36.

14) Προαύλιον ἔχον ἔκτασιν 54 τετρ. μέτρ. στρώνεται δι' 600 τετραγ. μαρμαρίνων πλακῶν. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστης πλακός;

'Απ. 0,09 τετρ. μέτρ.

15) 'Αγρός τις σχήματος ὀρθογωνίου ἔχει μῆκος 176 μέτρ. καὶ πλάτος 125 μέτρ., πόσα νέα στρέμματα εἶναι; 'Απ. 22.

'Οδηγία. Εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν εἰς τετρ. μέτρα καὶ ταῦτα τρέπομεν εἰς στρέμματα διὰ τῆς μετρήσεως ἢ διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα, γνωρίζοντες ὅτι 1000 μέτρα ἀποτελοῦσιν ἓν νέον στρέμμα.

16) Ἓν κιβώτιον περιέχει 18,50 λίτρας πετρελαίου· ἐὰν σπουδαστὴς ἐργάζηται 5 ὥρας καθ' ἑκάστην ἑσπέραν καὶ ὁ λαμπτὴρ αὐτοῦ δαπανᾷ 1 λίτραν εἰς 7 ὥρας, εἰς πόσας ἑσπέρας θὰ καύσῃ ὅλον τὸ κιβώτιον;

'Απ. Εἰς 26 περίπου.

'Οδηγία. Εὑρίσκομεν πρῶτον πόσας ὥρας ἐν ὅλῳ θὰ ἐργασθῇ μὲ ἓν κιβώτιον, καὶ ἔπειτα πόσας ἑσπέρας θὰ περάσῃ ἐργαζόμενος 5 ὥρας καθ' ἑκάστην ἑσπέραν.

17) Ἐὰν σπουδαστὴς εἰς 26 ἑσπέρας καίῃ ἓν κιβώτιον πετρελαίου 18,50 λιτρῶν, νὰ εὑρεθῇ πόσον πετρέλαιον καίει καθ' ἑκάστην καὶ πόσα χρήματα δαπανᾷ, ἐὰν τὸ κιβώτιον ἀξίζῃ 12,50 γρόσ.

Ἀπ. Καίει 0,711 λίτρ. περίπου, δαπανᾷ δὲ 19 παρ. περίπου.

18) Ἠγόρασέ τις 9 δωδεκάδας μανδήλια πρὸς 4,80 φρ. τὴν δωδεκάδα, Πόσα γρόσια πρέπει νὰ πωλήσῃ ὅλα τὰ μανδήλια, διὰ νὰ ὠφεληθῇ 20 παρ. ἐξ ἑκάστου; Ἀπ. 259,20.

Ὁδηγία. Εὑρίσκομεν τὴν ἀξίαν τοῦ ἐμπορεύματος εἰς φράγκα καὶ ταῦτα τρέπομεν εἰς γρόσια, εἰς τὰ ὁποῖα προσθέτομεν καὶ τὸ κέρδος ὅλου τοῦ ἐμπορεύματος.

19) Ἔμπορος ἠγόρασε 18 κυτία πέννας ἀντὶ 8 φιορινίων. Ἕκαστον κυτίον περιέχει 144 πέννας. Πόσους παράδες πρέπει νὰ πωλῇ τὴν πένναν, ἵνα κερδίζῃ 1 παρᾶν ἐξ ἑκάστης; Ἀπ. 2,5 παρ. περίπου.

20) Νὰ τραπῶσι 3755,605 γραμμ. εἰς χιλιόγρ. Ἀπ. 3,755... χγ.

21) Νὰ τραπῶσι 3575,605 γραμμ. εἰς δράμ. Ἀπ. 1117,37... δραμ.

Λύσις. 16 γραμμ. εἶναι 5 δράμ.

1 » » $\frac{5}{16}$ »

καὶ 3575,605 » » $\frac{5\times 3575,605}{16}$ δράμ.

22) 250 χγ. πόσαι ὀκάδες εἶναι; Ἀπ. 195 ὀκ. ἢ ἀκριβέστερον 195,31.

Λύσις. Τὸ 1 χγ. εἶναι 0,78 ὀκ. ἄρα 250 χγ. εἶναι $0,78\times 250=195$ ὀκ.

23) 44 ὀκάδες ἤτοι εἷς στατὴρ πόσα χιλιόγραμμα εἶναι; Ἀπ. 56,32 χγ.

Λύσις. Ἡ 1 ὀκᾶ εἶναι 1,28 χγ., αἱ 44 θὰ εἶναι $1,28\times 44$.

24) Φρέαρ ἔχει βάθος 8 ὀργυιῶν· πόσων μέτρων εἶναι τὸ βάθος ἢ πόσων πήχεων; Ἀπ. 15,60 μέτρ. ἢ 24 πήχ.

Ὁδηγία. Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου πρέπει νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν, ὅτι 1 ὀργυιὰ εἶναι 1,95 μέτρ. ἢ 3 πήχ.

25) Μία ὑάρδα πόσοι πήχεις εἶναι; Ἀπ. 1,41 πήχ.

Λύσις 1η. Ἐκφράζομεν καὶ τὴν ὑάρδαν καὶ τὸν πῆχυν εἰς μέτρα λαμβάνοντες τὰ ἀκριβῆ αὐτῶν μεγέθη· εἶναι δὲ ἡ μὲν ὑάρδα 0,91439 μέτρ., ὁ δὲ πῆχυς 0,648. Ἔπειτα σκεπτόμεθα οὕτως· ἐὰν ἀφαιρέσωμεν 0,648 ἀπὸ τὰ 0,91439, θὰ ἔχωμεν 1 πῆχυν· ἐὰν καὶ πάλιν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπον, θὰ ἔχωμεν δύο πήχεις, καὶ ὅσας φορὰς ἀφαιρέσωμεν, τόσους πήχεις θὰ ἔχωμεν. Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι θὰ ἔχωμεν τόσους πήχεις, ὅσας φορὰς ὁ 0,648 εἰσχωρεῖ εἰς τὸν 0,91439.

Λύσις 2α 'Αφοῦ 0,648 μέτρ. εἶναι 1 πῆχ.

τὰ 648 » » 1000 »

καὶ τὸ 1 » » $\frac{1000}{648}$ »

καὶ τὰ 0,91439 μέτρ. θὰ εἶναι $\frac{1000\times0{,}91439}{648}=\frac{914{,}39}{648}=1{,}41$ πήχ.

26) Πόσα ρούπια εἶναι 0,41 τοῦ πήχεως; 'Απ. $0{,}41\times8=3{,}28$ ρούπ.

27) Νὰ τραπῶσι 13 ὑάρδαι εἰς πήχεις.

Λύσις. 'Αφοῦ 1 ὑάρδα εἶναι 1,41 πήχ., αἱ 13 ὑάρδαι θὰ εἶνα $1{,}41\times13=18{,}33$ Λύσις 2α. Τρέπομεν πρῶτον τὰς 13 ὑάρδας εἰς μέτρα καὶ εὑρίσκομεν 11,83 καὶ ταῦτα τρέπομεν εἰς πήχεις ὡς ἑξῆς:

0,65 μέτρ. εἶναι 1 πῆχ.

65 » » 100 »

1 » » $\frac{100}{65}$ »

καὶ 11,83 » » $\frac{1183}{65}=18{,}20$.

Σημ. Τὸ λάθος 0,13 τοῦ πήχεως προέκυψε, διότι ἐλάβομεν τὴν μὲν ὑάρδαν 0,91 τοῦ μέτρου, τὸν δὲ πῆχυν 0,65 τοῦ μέτρου.

28) Ἓν μέτρον πόσοι πήχεις εἶναι; 'Απ. 1,54 πήχ.

29) 15 πήχεις πόσα μέτρα εἶναι;

Λύσις. 1 πῆχ. εἶναι 0,65, οἱ 15 πήχ. θὰ εἶναι $0{,}65\times15=9{,}75$ μέτρ.

30) 25 μέτρα πόσοι πήχεις εἶναι;

'Αφοῦ 0,65 μέτρ. εἶναι 1 πῆχ.

τὰ 65 » » 100 »

τὸ 1 » » $\frac{100}{65}$ »

καὶ τὰ 25 » » $\frac{100\times25}{65}=38{,}46$ πήχ.

31) 28 ἀρσίνες πόσα μέτρα εἶναι; 'Απ. 18,76.

32) 32 μέτρα πόσοι ἀρσίνες εἶναι; 'Απ. 47,76.

33) 8 τεκτονικοὶ πήχεις πόσα μέτρα εἶναι; 'Απ. 6 μέτρ.

34) 12 μέτρα πόσοι τεκτονικοὶ πήχεις εἶναι; 'Απ. 16.

35) Νὰ τραπῶσι 13 ὑάρδαι εἰς μέτρα. 'Απ. 11,83.

36) 14 μέτρα πόσαι ὑάρδαι εἶναι; 'Απ. 15,38.

37) Νὰ τραπῶσι 9 ὑάρδαι εἰς πήχεις. 'Απ. 12,60.

Ὁδηγία. Ἐὰν δὲν ἐνθυμώμεθα τὴν σχέσιν μεταξὺ ὑάρδας καὶ πήχεως, τρέπομεν τὰς 9 ὑάρδας πρῶτον εἰς μέτρα, ὅπως ἀνωτέρω εἴδομεν, καὶ εὑρίσκομεν 8,19 μέτρα καὶ ταῦτα ἔπειτα εἰς πήχεις.

38) Ἠγόρασέ τις 15 μέτρα ὑφάσματος πρὸς 8,50 γρόσ. τὸ μέτρον. Πό-

σον πρέπει νὰ πωλήσῃ τοὺς 5 πήχεις, ἵνα ὠφεληθῇ ἐξ ὅλου τοῦ ὑφάσματος 30 γρόσια; 'Απ. 34,10 γρόσ.

'Οδηγία. Εὑρίσκομεν πρῶτον τὴν ἀξίαν ὅλου τοῦ ὑφάσματος· εἰς ταύτην προσθέτομεν καὶ τὸ ζητούμενον κέρδος. Ἔπειτα τρέπομεν τὰ μέτρα εἰς πήχεις καὶ εὑρίσκομεν τὴν εἰς ἕκαστον πῆχυν ἀντιστοιχοῦσαν ἀξίαν πωλήσεως καὶ μετὰ ταῦτα τὴν ἀξίαν τῶν 5 πήχ.

39) Δωμάτιον ἔχον βάσιν ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου τὸ μὲν μῆκος εἶναι 8 πήχεις, τὸ δὲ πλάτος 7 πήχ. πρόκειται νὰ στρωθῇ διὰ σανίδων, τῶν ὁποίων τὸ μὲν μῆκος εἶναι 0,75 μέτρ. τὸ δὲ πλάτος 0,11 μέτρ. Πόσαι σανίδες χρειάζονται; 'Απ. $286\frac{26}{33}$.

'Οδηγία. Τρέπομεν τοὺς πήχεις εἰς μέτρα καὶ εὑρίσκομεν πόσα τετρ. μέτρα εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως τοῦ δωματίου, ἥτις πρόκειται νὰ στρωθῇ. Ἔπειτα εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστης σανίδος καὶ μετὰ ταῦτα, ἐκ τῶν δύο τούτων ἀριθμῶν, διὰ τῆς μετρήσεως ἢ διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα, τὸν ζητούμενον ἀριθμόν.

40) 320 τόννοι πόσα χιλιόγραμμα καὶ πόσαι ὀκάδες εἶναι;

Λύσις. Ὁ 1 τόννος εἶναι 1000 χγ. ἢ 781,25 ὀκ. ἑπομένως

320 τόννοι » 1000×320 χγ. ἢ 781,25×320 ὀκ. ἤτοι

'Απ. 320000 χγ. ἢ 250000 ὀκ.

41) 1500 ὀκάδες πόσοι τόννοι εἶναι;

'Επειδὴ 781,25 ὀκ. εἶναι 1 τόννος,

1 » » $\frac{1}{781,25}$ τόνν.

καὶ 1500 » » $\frac{1500}{781,25}=\frac{150000}{78125}=1,92\ldots$ τόνν.

42) 1,92 τόννοι πόσα χιλιόγραμμα εἶναι; 'Απ. 1920 χγ.

43) 15 στρέμματα παλαιὰ πόσα νέα εἶναι;

'Επειδὴ 1 στρ. παλαιὸν εἶναι 1,27 νέα

15 » παλαιὰ θὰ εἶναι 1,27×15=19,05 στρ. νέα.

44) 12 στρέμματα νέα πόσα παλαιὰ εἶναι;

Λύσις. 1 στρ. νέον εἶναι 0,787 παλ. στρ., τὰ 12 νέα στρ. εἶναι 0,787×12=9,444 στρ. παλ.

45) Νὰ τραπῶσι 0,444 στρ. παλαιὰ εἰς τετραγωνικὰ μέτρα.

Λύσις. Τὸ 1 παλ. στρ. εἶναι 1270 μέτρα, ἄρα 0,444 στρ. παλ. θὰ εἶναι 563,88 τετρ. μέτρα.

46) Νὰ τραπῶσιν 25 στρ. παλ. εἰς ἑκτάρια.

Λύσις. Τρέπομεν πρῶτον τὰ παλαιὰ στρέμματα εἰς μέτρα καὶ ταῦτα εἰς ἑκτάρια καὶ εὑρίσκομεν 3,1750 ἑκτάρ. ἤτοι 3 ἑκτ. καὶ 1750 τετρ. μέτρ.

47) 150 ἄρ πόσα τετρ. μέτρ. εἶναι, πόσα νέα στρέμματα, πόσα ἑκτάρια;

'Απ. 15000 τετρ. μέτρ. 15 στρέμ. νέα, 1,50 ἑκτάρια.

48) 248 τετρ. τεκτον. πήχεις πόσα τετρ. μέτρα εἶναι;

Λύσις. 'Αφοῦ 1 τετρ. τεκτον. πῆχυς εἶναι $\frac{9}{16}$ τετρ. μέτρ., οἱ 248 τετρ. τεκτον. πήχ. θὰ εἶναι $\frac{9\times248}{16}=139,50$ τετρ. μέτρ.

49) Νὰ τραπῶσι 50 ρούβλια εἰς φιορίνια καὶ εἰς μάρκα

Λύσις. Γνωρίζομεν ὅτι 20 φρ. ἰσοδυναμοῦν πρὸς 8 φιορ. ἢ 7,5 ρούβλ. 'Αφοῦ λοιπὸν 7,5 ρούβλ. ἰσοδυναμοῦν πρὸς 8 φιορ. τὸ 1 ρούβλ. ἰσοδυναμεῖ πρὸς $\frac{8}{7,5}$ φιορ. καὶ τὰ 50 ρούβλ. εἶναι, $\frac{8\times50}{7,5}=53,33\frac{1}{3}$ φιορ. Ἐπειδὴ δὲ 1 φιορ. εἶναι 2 μάρκ. τὰ $53,33\frac{1}{3}$ φιορ. θὰ εἶναι $106,66\frac{2}{3}$ μαρκ.

50) 15 σελίνια πόσα φράγκα εἶναι;

Λύσις. 1 σελ. εἶναι 1,26 φρ. ἄρα 15 σελ. θὰ εἶναι $1,26\times15=18,90$ φρ.

51) 35 μάρκα πόσα γρόσια εἶναι;

Λύσις. Ἐπειδὴ 1 μάρκον εἶναι 5,86 γρόσια, τὰ 35 μάρκα θὰ εἶναι $5,86\times35=205,10$ γρόσ.

52) 'Ηγόρασέ τις εἰς Ρωσσίαν 50 χγ. χαβιάριον πρὸς 3,50 ρούβλια τὸ χγ., ἐπλήρωσε πρὸς μεταφορὰν εἰς Κων/πολιν 3,56 φρ. καὶ εἰς τὸ τελωνεῖον 1,50 τουρ. λίρ. Πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὴν ὀκάν, ἵνα κερδίσῃ 650 γρόσ;

'Απ. 78 γρόσ. περίπου.

Ὁδηγία. Εὑρίσκομεν πρῶτον πόσα ρούβλια ἀξίζει τὸ χαβιάριον, ἔπειτα τρέπομεν ταῦτα, τὰ μεταφορικὰ καὶ τὰ τελωνειακὰ εἰς γρόσια. Ταῦτα πάντα καὶ τὸ κέρδος προσθέτομεν, ἵνα εὕρωμεν πόσον ἐκόστισε τὸ χαβιάριον καὶ πόσα τὸ ὅλον θὰ λάβωμεν. Ἔπειτα τρέπομεν τὰ χιλιόγραμμα εἰς ὀκάδας καὶ μερίζομεν τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον θὰ λάβωμεν, εἰς τὰς ὀκάδας, ἢ εὑρίσκομεν τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα.

53) Ἠγόρασέ τις ἐξ Εὐρώπης μεταξωτὸν ὕφασμα πρὸς 7 φρ. τὸ μέτρον καὶ πωλεῖ 33 γρόσ. τὸν ἀρσίν. Πόσα κερδίζει εἰς ἕκαστον ἀρσίν, ἐὰν δι' ἕκαστον τούτων ἔχῃ κάμῃ καὶ ἔξοδα πρὸς μεταφορὰν καὶ τελωνεῖον 6 γρόσια.

'Απ. 4,72.

54) Πρὸς κατασκευὴν ἐνδυμασίας ἠγόρασέ τις $3\frac{1}{2}$ μέτρα ὑφάσματος πρὸς 12,50 φρ. τὸ μέτρον. Ἐπλήρωσε διὰ διάφορα ἔξοδα 25 γρόσ. καὶ διὰ ραπτικὰ 2 λίρ. Πόσα γρόσια τὸ ὅλον ἐδαπάνησε;

'Απ. 448,81 γρόσ.

55) Πόσον βάρος ἔχουν ἐν συνόλῳ 250 εἰκοσάφραγκα, 40 μάρκα ἀργυρᾶ, 87 σελίν. ἀργ. καὶ 15 φιορ. ἀργ.; 'Απ. 2512,30 γραμμ.

56) Πόσον ἐν συνόλῳ εἶναι τὸ βάρος 50 μετζητιέδων, 285 γροσίων, 94 φρ. ἀργ. καὶ 87 ρουβλίων; 'Απ. 3755,60 γραμμ.

57) Πόσον βάρος ἔχουν 120 λίραι ἀγγλικαὶ καὶ πόσον καθαρὸν χρυσόν; 'Απ. Τὸ βάρος εἶναι 958,56 γραμμ. ὁ δὲ καθαρὸς χρυσὸς 878,67 γραμμ.

58) Πόσον εἶναι τὸ βάρος 30 δουκάτων, 16 εἰκοσαφράγκων, 8 λιρ. ἀγγλ. καὶ 15 λιρ. γερμ. καὶ πόσος ὁ εἰς τὰ 30 δουκᾶτα καὶ τὰ 15 εἰκοσάφρ. περιεχόμενος καθαρὸς χρυσός;

'Απ. Τὸ βάρος ὅλων εἶναι 391,3346 γραμμ., ὁ δὲ καθαρὸς χρυσὸς ὁ περιεχόμενος εἰς τὰ δουκᾶτα καὶ εἰκοσάφρ. εἶναι

$$103{,}2638+92{,}9030=195{,}26\ldots \text{ γραμμ.}$$

59) Πόσον εἶναι τὸ βάρος καὶ πόσος ὁ καθαρὸς ἄργυρος 25 σελινίων, 80 φρ., 15 μάρκ. καὶ 10 μετζ.;

'Απ. Τὸ βάρος $141{,}375+400+83{,}340+240{,}55=865{,}26$ γραμμ. ὁ δὲ καθ. ἄργυρος $130{,}7718+334+75{,}006+199{,}6565=739{,}4343$.

60) Ἔμπορος προσῆλθεν εἰς τράπεζαν, ὅπως παραλάβῃ 500 τουρκ. λίρ. ἀλλ' ἀντὶ νὰ μετρήσωσιν αὐτῷ ταύτας, ἐζύγισαν ποσόν τι, τὰς ὁποίας καὶ τῷ παρέδωκαν· ἦσαν δὲ αὗται ἀκριβῶς 500. Πόσον βάρος λιρῶν ἐζύγισεν ὁ ὑπάλληλος; 'Απ. 3608 γραμμ.

61) Πόσα ἀργυρᾶ φράγκα ἔχουν βάρος 250 γραμμ.; 'Απ. 50 φρ.

62) Πόσαι λίραι τουρκικαὶ ἔχουν βάρος 108,24 γραμμ.; 'Απ. 15.

63) Πόσα σελίνια ἔχουν βάρος 113,10 γραμμ.; 'Απ. 20.

64) Πόσα ἀργ. φράγκα κατασκευάζομεν μὲ 208,75 γραμμ. καθαροῦ ἀργύρου; 'Απ. 50.

Ὁδηγία. Γνωρίζοντες ὅτι εἰς ἕκαστον γραμμ. ἑνὸς φράγκου τὰ 0,835 γραμμ. εἶναι καθαρὸς ἄργυρος, εὑρίσκομεν πόσος καθαρὸς ἄργυρος περιέχεται εἰς ἓν φράγκον καὶ ἔπειτα διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα ἢ διὰ τῆς μετρήσεως πόσα φράγκα κατασκευάζομεν μὲ 208,75 γραμμ. καθαροῦ ἀργύρου.

65) Εἰς πόσα μετζήτια περιέχονται 1996,565 γραμμ. καθαροῦ ἀργύρου; 'Απ. 100.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΣΥΜΜΙΓΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

215. Εἴδομεν, ὅτι πρὸς μέτρησιν ποσοῦ τινος λαμβάνομεν μίαν ἀρχικὴν μονάδα, τὴν ὁποίαν χωρίζομεν εἰς ἴσα μέρη, καὶ μὲ ταῦτα μετροῦμεν τὰ μικρότερα τῆς μονάδος ὁμοειδῆ μεγέθη, ὅτι δὲ εἰς τὰ μέρη ταῦτα δίδομεν ἰδιαίτερα ὀνόματα.

Ὁμοίως πολλὰς ὁμοῦ ἀρχικὰς μονάδας λαμβάνομεν ὡς μίαν μὲ ἴδιον ὄνομα καὶ διὰ ταύτης μετροῦμεν τὰ πολὺ μεγάλα μεγέθη· οὕτω τὴν ἡμέραν διαιροῦμεν εἰς ὥρας, τὰς ὥρας εἰς πρῶτα λεπτὰ καὶ ταῦτα εἰς δεύτερα λεπτά. Ὡσαύτως 365 ἡμέραι λαμβάνονται ὡς μία μονάς, τὸ *ἔτος*, καὶ 100 τοιαῦτα ὡς νέα πάλιν μονάς, ὁ *αἰών*.

Ὑποθέσωμεν, ὅτι εἰς μέτρησίν τινα χρόνου εὕρομεν 5 ἡμέρας, 7 ὥρας, 25΄ καὶ 45΄΄. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος, ὅστις φέρει ἀρχικὰς μονάδας, οἷον ἡμέρας καὶ μέρη τῆς ἡμέρας, οἷον ὥρας, πρῶτα καὶ δεύτερα λεπτά, τῶν ὁποίων ἕκαστον λαμβάνεται ὡς νέα μονὰς ἀνεξάρτητος τῆς ἀρχικῆς καὶ μὲ ἰδιαίτερον ὄνομα, λέγεται *συμμιγής*.

Ὅθεν. *Συμμιγὴς ἀριθμὸς λέγεται ἐκεῖνος, ὅστις περιέχει ἀρχικὰς μονάδας καὶ ἁπλᾶ μέρη τῆς ἀρχικῆς ἢ καὶ πολλαπλάσια αὐτῆς, τῶν ὁποίων ἕκαστον θεωρεῖται ὡς νέα μονὰς καὶ φέρει ἴδιον ὄνομα.*

Τροπὴ συμμιγοῦς εἰς ἀριθμὸν μιᾶς μονάδος.

216. *Πρόβλ.* Νὰ τραπῇ ὁ συμμιγὴς 5 ἡμ., 7 ὥρ., 25΄ καὶ 45΄΄, 1) εἰς δεύτερα λεπτά, 2) εἰς πρῶτα, 3) εἰς ὥρας καὶ 4) εἰς ἡμέρας.

1) Διὰ νὰ τρέψωμεν τὸν συμμιγῆ 5 ἡμ. 7 ὥρ. 25΄ 45΄΄ εἰς

δεύτερα λεπτὰ ἀρχόμενοι ἐκ τῆς ἀνωτάτης μονάδος σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς:

Διάταξις τῶν πράξεων

ἡμ. ὥρ.
5 7 25′ 45″
×24
120 ὥρ.
+7 ὥρ.
127 ὥρ.
×60
7620′
+25′
7645′
×60
458700″
+45″
458745″

Ἐπειδὴ μία ἡμέρα ἔχει 24 ὥρας, αἱ 5 ἡμέραι ἔχουν 5×24 ἤτοι 120 ὥρας καὶ 7 τοῦ συμμιγοῦς 127 ὥρας.

Τὰς 127 ὥρας τρέπομεν εἰς πρῶτα λεπτὰ πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ 60, (ἐπειδὴ 1 ὥρα ἔχει 60′) καὶ εὑρίσκομεν 127×60, ἤτοι 7620′, εἰς τὰ ὁποῖα προσθέτοντες καὶ τὰ 25 τοῦ συμμιγοῦς ἔχομεν τὸ ὅλον 7645′

Τὰ 7645 τρέπομεν εἰς δεύτερα λεπτὰ πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ 60, (διότι 1′ ἔχει 60″) καὶ εὑρίσκομεν 7645×60 δεύτερα λεπτά, ἤτοι 458700″, εἰς ταῦτα προσθέτοντες καὶ τὰ 45 τοῦ συμμιγοῦς εὑρίσκομεν ἐν συνόλῳ 458745″, ὅθεν

5 ἡμ. 7 ὥρ. 25′ 45″=458745″

2) Διὰ νὰ τρέψωμεν τὸν δοθέντα συμμιγῆ εἰς πρῶτα λεπτά, τρέπομεν πάσας τὰς ἀνωτέρας τούτων μονάδας, ἤτοι τὰς 5 ἡμ. 7 ὥρ. εἰς πρῶτα λεπτὰ καὶ εὑρίσκομεν 7620′ καὶ 25 τοῦ συμμιγοῦς γίνονται 7645.

Μετὰ ταῦτα τρέπομεν καὶ τὰς κατωτέρας μονάδας, ἤτοι τὰ δεύτερα λεπτὰ εἰς πρῶτα· οὕτω, τὸ 1″ εἶναι $\frac{1}{60}$′, ἄρα 45″ θὰ εἶναι $\frac{45}{60}=\frac{3}{4}$′· ὥστε ἔχομεν ἐν ὅλῳ 7645′ $\frac{3}{4}$ πρῶτα λεπτὰ ἤτοι
5 ἡμ. 7 ὥρ. 25′ 45″=7645′ $\frac{3}{4}$.

3) Διὰ νὰ τρέψωμεν τὸν δοθέντα συμμιγῆ εἰς ὥρας, τρέπομεν τὰς 5 ἡμ. εἰς ὥρας καὶ εὑρίσκομεν 120 ὥρας καὶ 7 τοῦ συμμιγοῦς 127 ὥρ. Μετὰ ταῦτα τρέπομεν τὰς κατωτέρας τῶν ὡρῶν μονάδας 25′ 45″ εἰς τὴν κατωτάτην ὑποδιαίρεσιν, ἤτοι εἰς δεύτερα λεπτὰ καὶ εὑρίσκομεν 1545″. Ἔπειτα ζητοῦμεν πόσα δεύτερα λεπτὰ περιέχει 1 ὥρα καὶ εὑρίσκομεν 3600″, ἄρα τὸ 1″ εἶναι $\frac{1}{3600}$

τῆς ὥρας καὶ τὰ 1545'' εἶναι $\frac{1545}{3600}$ ὥρ. $= \frac{103}{240}$ ὥρ., ἐπομένως 4 ἡμ. 7 ὥρ. 25' 45''$=127\frac{103}{240}$ ὧραι.

4) Διὰ νὰ τρέψωμεν τέλος τὸν δοθέντα συμμιγῆ εἰς ἡμέρας, τὰς μὲν ἐν αὐτῷ 5 ἡμ. ἀφίνομεν, ὡς ἔχουσι, καὶ τρέπομεν τὰς κατωτέρας τῆς ἡμέρας μονάδας, ἤτοι τὸν ἀριθμὸν 7 ὥρ. 25' 45'' εἰς τὴν κατωτάτην ὑποδιαίρεσιν, καὶ εὑρίσκομεν 26745''. Ἔπειτα εὑρίσκομεν πόσα δεύτερα λεπτὰ περιέχει ἡ ἡμέρα· ἐπειδὴ δὲ

1 ἡμ. εἶναι 24 ὥρ. ἢ 1440' ἢ 86400'', ἕπεται ὅτι,

1'' εἶναι $\frac{1}{86400}$ τῆς ἡμέρας·

τὰ δὲ 26745'' εἶναι $\frac{26745}{86400}$ ἡμ, ἢ $\frac{1783}{5760}$ τῆς ἡμέρας·

ἐπομένως ἔχομεν 5 ἡμ. 7 ὥρ. 25' 45'' $= 5\frac{1783}{5760}$ ἡμ.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὰς ἑξῆς ἰσότητας·

5 ἡμ. 7 ὥρ. 25' 45''$=5\frac{1783}{5760}$ ἡμ. ἢ $127\frac{103}{240}$ ὥρ.

ἢ 7645'$\frac{3}{4}$ ἢ 458745''· ἢ καὶ 5 ἡμ. 7 ὥρ. 25' 45''$=$

5,3095... ἡμ. ἢ 127,4292... ὥρ. ἢ 7645,75' ἢ 458745''

καὶ τὸν ἑξῆς κανόνα,

Ἵνα τρέψωμεν συμμιγῆ εἰς ἀριθμὸν μιᾶς μονάδος, τρέπομεν εἰς ταύτην πάσας τὰς ἀνωτέρας αὐτῆς μονάδας. Τὰ δὲ μέρη, τῶν ὁποίων αἱ μονάδες εἶναι κατώτεραι, τρέπομεν εἰς κλάσμα τῆς ὁρισθείσης μονάδος. Τὸ κλάσμα τοῦτο εὑρίσκομεν, ἐὰν πάσας τὰς κατωτέρας τῆς ὁρισθείσης μονάδος τρέψωμεν εἰς τὸ κατώτατον εἶδος καὶ ὑπὸ τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν θέσωμεν παρονομαστὴν τὸν ἀριθμόν, ὅστις δεικνύει πόσας μονάδας τῆς κατωτάτης τάξεως περιέχει ἡ ὁρισθεῖσα μονάς.

Ἀσκήσεις.

Νὰ τραπῶσιν 7 στατῆρες, 32 ὀκ., 250 δράμ. 1) εἰς στατῆρας, 2) εἰς ὀκάδας καὶ 3) εἰς δράμια.

Νὰ τραπῶσι 15° 35' 45'' 1) εἰς μοίρας, 2) εἰς πρῶτα λεπτὰ καὶ 3) εἰς δευτερόλεπτα.

Νὰ τραπῶσι 5 πήχ. 7 ρούπ. 1) εἰς πήχεις, 2) εἰς ρούπια.

Νὰ τραπῶσι 15 λίρ. ἀγγλ. 7 σελ. 8 πέν. 2 φαρδ. 1) εἰς φαρδίνια, 2) εἰς λίρας ἀγγλ. 3) εἰς σελίνια.

Νὰ τραπῶσι 5 λίρ. τουρ. 75 γρόσ. 30 παρ. 1) εἰς γρόσια καὶ 2) εἰς λίρας.

Τροπὴ ἀκεραίου εἰς συμμιγῆ.

218. *Πρόβλημα*. Νὰ τραπῶσι 758427 παρ. εἰς γρόσια καὶ λίρας Τουρκίας.

```
   παρ.      παρ.
758427     | 40
           |--------
358          18960 γρ. | 108
 384          816      |--------
  242          600       175 λίρ.
   27 παρ.      60
```

Εἶναι φανερὸν ὅτι, ὅσας φορὰς εἶναι δυνατὸν νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοὺς 758427 παρ. 40 παρ. δηλ. ὅσας φορὰς εἰσχωρεῖ ὁ 40 εἰς τὸν 758427, τόσα γρόσια θὰ ἔχωμεν· τοῦτο δὲ εὑρίσκομεν διὰ τῆς διαιρέσεως, τῆς ὁποίας τὸ πηλίκον εἶναι 18960 γρόσ. καὶ ὑπόλοιπον 27 παρ. Ἐκ τῶν 18960 γροσ. ἀφαιροῦντες 108 γρόσ. σχηματίζομεν μίαν λίραν καὶ ἐξακολουθοῦντες τὰς ἀφαιρέσεις, ἤτοι διαιροῦντες 18960 διὰ 108, θὰ εὕρωμεν 175 λίρ. καὶ ὑπόλοιπον 60 γρόσ., ὥστε ἔχομεν 758427 παρ.=175 λίρ. 60 γρ. 27 παρ.

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος τούτου συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα:

219. *Ἵνα τρέψωμεν μονάδας τάξεώς τινος εἰς συμμιγῆ, τρέπομεν πρῶτον εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, διαιροῦντες, ὡς γνωρίζομεν, τὸν δοθέντα ἀριθμὸν δι' ἐκείνου, ὅστις δεικνύει πόσαι μονάδες τῆς δοθείσης τάξεως ἀποτελοῦν μίαν τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας. Ὁμοίως σκεπτόμενοι ἐργαζόμεθα ἐπὶ τῶν εὑρισκομένων πηλίκων καὶ ἐκτελοῦμεν σειρὰν διαιρέσεων, μέχρις ὅτου εὕρωμεν πηλίκον, τοῦ ὁποίου αἱ μονάδες νὰ εἶναι ὀλιγώτεραι τῶν ἀπαιτουμένων, ὅπως ἀποτελέσωσι μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως. Πάντα τὰ ὑπόλοιπα μετὰ τοῦ τελευταίου πηλίκου ἀποτελοῦσι τὸν ζητούμενον συμμιγῆ.*

Ἀσκήσεις.

Νὰ τραπῶσιν εἰς συμμιγεῖς οἱ ἑξῆς ἀριθμοί·
356564'' εἰς ὑποδιαιρέσεις τοῦ κύκλου·
356564'' εἰς τὰς διαφόρους μονάδας τοῦ χρόνου·
75624 παρ. εἰς γρόσ. καὶ λίρας τουρκ.
8542 πένν. εἰς σελίνια καὶ ἀγγλ. λίρας·
75624 δράμ. εἰς ὀκάδας καὶ στατῆρας.

Τροπὴ κλάσματος εἰς συμμιγῆ.

220. *Πρόβλ.* Νὰ τραπῇ τὸ κλάσμα $\frac{23}{8}$ τῆς λίρας εἰς συμμιγῆ.
Τὸ κλάσμα $\frac{23}{8}$ παριστᾷ ἕκαστον μερίδιον, ὅταν 23 λίραι χωρισθῶσιν εἰς 8 ἴσα μέρη. Εἶναι δὲ φανερόν, ὅτι, ἐὰν τὰς 23 λίρ. μερίσωμεν εἰς 8 μέρη, ἤτοι διαιρέσωμεν 23 διὰ 8, θὰ εὕρωμεν πηλίκον 2 λίρ. καὶ ὑπόλοιπον 7 λίρας. Ἐπειδὴ δὲ δὲν δυνάμεθα νὰ μερίσωμεν τὰς 7 λίρας εἰς 8 μέρη, ἤτοι νὰ διαιρέσωμεν διὰ 8, τρέπομεν ταύτας εἰς γρόσια πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ 108 καὶ εὑρίσκομεν 756 γρόσια. Ταῦτα διαιροῦμεν διὰ 8 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 94 γρόσ. καὶ ὑπόλοιπον 4 γρόσ. Ταῦτα τρέπομεν εἰς παράδες πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ 40· εὑρίσκομεν δὲ 160 παρ. τοὺς ὁποίους μερίζοντες εἰς 8 μέρη, ἤτοι διαιροῦντες διὰ 8 λαμβάνομεν πηλίκον 20 καὶ ὑπόλοιπον 0.

23 λιρ.	8
7	2 λίρ. 94 γρ. 20 παρ.
×108 γρ.	
736	
36	
4 γρ.	
×40	
160	
0	

Ἔχομεν λοιπὸν

$\frac{23}{8}$ λίρ. = 2 λίρ. 94 γρόσ. 20 παρ.

Πρόβλημα. Τὸ κλάσμα $\frac{3}{8}$ τῆς λίρας νὰ τραπῇ εἰς συμμιγῆ.

3	8
108	40γρ. 20παρ.
324γρ.	
04	
×40	
160	
00	

Ἐπειδὴ ὁ 3 δὲν διαιρεῖται διὰ 8, δὲν ἔχομεν λίρας καὶ τρέπομεν τὸν ἀριθμὸν 3 εἰς 324 γρόσ. τὰ ὁποῖα διαιροῦντες διὰ 8 εὑρίσκομεν 40 γροσ. καὶ ὑπόλοιπον 4 γρόσ. ταῦτα τρέπομεν εἰς 160 παρ. τοὺς ὁποίους διαιροῦντες διὰ τοῦ 8 εὑρίσκομεν πηλίκον 20 παρ. καὶ ὑπόλοιπον 0.

Ὥστε ἔχομεν $\frac{3}{8}$ τῆς λίρας $=$ 40 γρόσ. 20 παρ.

Ἐκ τῆς λύσεως τῶν προβλημάτων τούτων συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα·

221. *Ἵνα τρέψωμεν κλάσμα εἰς συμμιγῆ, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητήν, ἂν διαιρῆται, διὰ τοῦ παρονομαστοῦ. Τὸ πηλίκον παριστᾷ μονάδας, τὰς ὁποίας καὶ τὸ κλάσμα· τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τρέπομεν εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως καὶ διαιροῦμεν διὰ τοῦ αὐτοῦ διαιρέτου· τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης εἶναι ὁμοειδὲς πρὸς τὸν διαιρετέον, ἐκ τοῦ ὁποίου προῆλθεν. Οὕτως ἐξακολουθοῦμεν τρέποντες ἕκαστον τῶν ἑπομένων ὑπολοίπων εἰς μονάδας κατωτέρας τάξεως μέχρις ὅτου φθάσωμεν εἰς τὴν κατωτάτην ὑποδιαίρεσιν. Τὰ πηλίκα, ἅτινα θὰ εἶναι ἕκαστον πάντοτε ὁμοειδὲς πρὸς τὸν διαιρετέον, ἐξ οὗ προῆλθεν, ἀποτελοῦσι τὸν ζητούμενον συμμιγῆ. Ἐὰν ἡ διαίρεσις τῆς κατωτάτης τάξεως ἀφήσῃ ὑπόλοιπον, γράφομεν ὑπ' αὐτὸ παρονομαστὴν τὸν διαιρέτην καὶ προσθέτομεν τὸ προκύπτον κλάσμα εἰς τὸ πηλίκον, ἢ ἐξακολουθοῦμεν τὴν διαίρεσιν τρέποντες τὸ ὑπόλοιπον εἰς δεκαδικὰς ὑποδιαιρέσεις τῆς κατωτάτης τάξεως.*

Ἀσκήσεις.

Νὰ τραπῶσιν εἰς συμμιγεῖς τὰ ἑξῆς κλάσματα·

$\frac{5}{7}$ τοῦ στατῆρος, $\frac{15}{113}$ τῆς ἡμέρας, $\frac{1}{8}$ τῆς μοίρας, $\frac{7}{9}$ τῆς ἀγγλ. λίρας, $\frac{4}{5}$ τῆς ὑάρδας, $\frac{8}{3}$ τοῦ πήχεως.

Τροπὴ δεκαδικοῦ εἰς συμμιγῆ.

222. *Πρόβλημα.* Νὰ τραπῶσι 592,4765 ὀκ. εἰς συμμιγῆ.

Τὰς μὲν 592 ὀκ. διαιροῦντες διὰ 44 τρέπομεν εἰς συμμιγῆ στατήρων καὶ ὀκάδων, ὅστις εἶναι 13 στατ. 20 ὀκ. Τὸν δὲ δεκαδικὸν 0,4765, ὅστις παριστᾷ ὀκάδας, τρέπομεν εἰς δράμια, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 400, οὕτω εὑρίσκομεν·

592,4765 ὀκ. = 13 στατ. 20 ὀκ. 190,60 δράμ.

Πρόβλημα. Νὰ τραπῇ ὁ ἀριθμὸς 7,362 λίρ. εἰς συμμιγῆ.

Αἱ 7 λίραι μένουν, ὅπως ἔχουσιν, ὁ δὲ 0,362 τρέπεται εἰς γρόσια, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 108, ὅτε ἔχομεν 39,096 γρόσ.

Τὸν 0,096 τρέπομεν εἰς παράδες πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ 40, οὕτω εὑρίσκομεν 3,84. παρ. ὥστε ἔχομεν

7,362 λίρ. = 7 λίρ. 39 γροσ. 3,84 παρ.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω δύο προβλημάτων συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα·

223. Κανών. *Ἵνα τρέψωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν μετ' ἀκεραίου μέρους εἰς συμμιγῆ, τρέπομεν τὸν μὲν ἀκέραιον, καθὼς ἐμάθομεν, εἰς μονάδας ἀνωτέρων τάξεων, ἂν ὑπάρχωσι καὶ εἶναι δυνατόν, τὸν δὲ δεκαδικὸν εἰς μονάδας κατωτέρας τῆς δοθείσης καὶ ἐξακολουθοῦμεν οὕτω μέχρι τῆς κατωτάτης, ἥτις δυνατὸν νὰ ἔχῃ καὶ δεκαδικὸν μέρος.*

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

1) Ἡ ἀκριβὴς διάρκεια ἑνὸς ἔτους εἶναι 365,24226 ἡμ. Νὰ τραπῇ ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἰς συμμιγῆ ἡμερῶν, ὡρῶν κτλ. 365ἡμ 5ὧ 48′ — 51,26

2) Νὰ τραπῶσι 7,75 γρόσ. εἰς συμμιγῆ.

3) Νὰ τραπῶσι 5,37 πήχ. εἰς συμμιγῆ.

4) Νὰ τραπῶσι 7,362 ὑάρδ. εἰς συμμιγῆ

ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΣΥΜΜΙΓΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

224. Τοὺς συμμιγεῖς ἀριθμοὺς προσθέτομεν ὅπως καὶ τοὺς ἀκεραίους, δηλ. χωριστὰ τὰς μονάδας ἑκάστης τάξεως ἀρχίζοντες ἐκ τῶν μονάδων τῆς κατωτάτης, μὲ μόνην τὴν διαφοράν, ὅτι ἕκαστον μερικὸν ἄθροισμα, ἐὰν ὑπερβαίνῃ τὸν ἀριθμόν, ὅστις ἀπαιτεῖται, ἵνα σχηματισθῇ μία μονὰς τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου, καὶ τὸ μὲν ὑπόλοιπον θὰ εἶναι τῆς τάξεως τῶν προσθετέων, τὸ δὲ πηλίκον θὰ παριστᾷ μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, μετὰ τῶν ὁποίων προσθέτομέν αὐτό.

Ὁ σχηματισμὸς μιᾶς ἢ πολλῶν ἀνωτέρας τάξεως μονάδων ἐκ πολλῶν κατωτέρων καὶ ὁ διὰ τοῦ τρόπου τούτου κατάλληλος εἰς τάξεις διαμοιρασμὸς τῶν μονάδων τοῦ συμμιγοῦς λέγεται *ἀναγωγὴ ἢ καὶ κατάταξις τῶν μονάδων τοῦ συμμιγοῦς*.

Παρατήρησις Πιθανὸν αἱ μονάδες τῆς τελευταίας τάξεως νὰ ἔχουν καὶ κλασματικὰς μονάδας ἢ δεκαδικάς, δηλ. νὰ εἶναι ἢ μεικτοὶ ἢ δεκαδικοὶ ἀριθμοί, τότε προσθέτομεν αὐτοὺς ὅπως τοὺς μεικτοὺς (141) ἢ τοὺς δεκαδικούς (189).

Παραδείγματα.

$5^{\text{ἡμ.}}$	$7^{\text{ὡρ.}}$	28′	35″	$8^{\text{λιρ.}}$	$58^{\text{γρ.}}$	$35\frac{1}{2}^{\text{παρ.}}$	$3^{\text{στατ.}}$	$27^{\text{ὀκ.}}$	$230,42^{\text{δρ.}}$
3	23	45	53″	3	95	$30\frac{1}{5}$	5	40	250,25
7	20	40	67	6	80	38	8	30	300,18
15	50	113	155	17	233	$103\frac{7}{10}$	16	97	780,85
ἢ 17	3	55′	35″	19	19	$23\frac{7}{10}$	18	10	380,85

Ἐν τῷ πρώτῳ ἀθροίσματι εἰς τὸν 155″ ὁ 60″ εἰσχωρεῖ δίς· ἔχομεν λοιπὸν 2′ καὶ ὑπόλοιπον 35″, τὸ ὑπόλοιπον γράφομεν ὑπὸ τὰ δεύτερα λεπτὰ καὶ τὰ 2′ προσθέτοντες μετὰ τῶν πρώτων λεπτῶν εὑρίσκομεν 115', εἰς τὸν ὁποῖον ὁ 60 εἰσχωρεῖ ἅπαξ· ἔχομεν λοιπὸν 1 ὥρ. καὶ 55''. ταῦτα γράφομεν ὑπὸ τὰ πρῶτα λεπτά, τὴν δὲ 1 ὥρ. προσθέτοντες εἰς τὰς ὥρας εὑρίσκομεν 51 ὥρας, εἰς τὰς ὁποίας ὁ 24 εἰσχωρεῖ δίς. Ἔχομεν λοιπὸν 2 ἡμέρας, μένουν δὲ καὶ 3 ὧραι. Τὰς 3 ὥρας γράφομεν ὑπὸ τὰς ὥρας καὶ τὰς 2 ἡμέρας προσθέτομεν εἰς τὰς ἡμέρας καὶ εὑρίσκομεν 17 ἡμέρας· οὕτω κατατάξαντες τὰς μονάδας εὕρομεν 17 ἡμ. 3 ὥρ. 55' 35''. Ὁμοίως γίνεται ἡ κατάταξις καὶ εἰς πᾶν ἄλλο ἄθροισμα.

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

225. Τοὺς συμμιγεῖς ἀριθμοὺς ἀφαιροῦμεν ὅπως καὶ τοὺς ἀκεραίους, δηλ. ἀφαιροῦμεν τὰς μονάδας ἑκάστης τάξεως τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὰς ὁμωνύμους μονάδας τοῦ μειωτέου, ὅταν τοῦτο εἶναι δυνατόν· ἄλλως ἂν μονάδες τάξεώς τινος ἐν τῷ ἀφαιρετέῳ εἶναι περισσότεραι τῶν ἀντιστοιχουσῶν ἐν τῷ μειωτέῳ, τότε προσθέτομεν εἰς τοῦτον τόσας μονάδας τῆς τάξεως ταύτης, ὅσας περιέχει μία μονὰς τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, καὶ οὕτω καθιστῶμεν δυνατὴν τὴν ἀφαίρεσιν προσέχοντες κατόπιν νὰ προσθέσωμεν μίαν μονάδα καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον τῆς ἀκολούθου ἀφαιρέσεως.

Παρατήρησις. Πιθανὸν αἱ μονάδες τῆς τελευταίας τάξεως νὰ περιέχωσι καὶ κλάσμα ἤτοι νὰ εἶναι μικτοί, τότε ἀφαιροῦμεν τούτους ὅπως τοὺς μικτοὺς (145).

Παράδειγμα.

8 μῆν.	15 ἡμ.	7 ὥρ.	20'	32''
2	23	16	45'	52''
5	21	14	34'	40''

Τὰ 52'' δὲν ἀφαιροῦνται ἀπὸ 32'', διὰ τοῦτο προσθέτομεν εἰς ταῦτα καὶ 60'' καὶ ἐκ τοῦ ἀθροίσματος 92'' ἀφαιροῦντες 52'' εὑρίσκομεν διαφορὰν 40''. Τὰ 60'', τὰ ὁποῖα ἐπροσθέσαμεν εἰς τὸν μειωτέον, τρέπομεν εἰς 1' καὶ προσθέτομεν εἰς τὸν ἀφαιρετέον λέγοντες 1 τὸ κρατούμενον καὶ 45' κάμνουν 46', ἀπὸ 20' δὲν ἀφαιρεῖται· ὅθεν ἀπὸ 60′+20′ ἤτοι ἀπὸ 80 μένουν 34′· 1 τὸ κρατούμενον καὶ 16 ὥρ. 17 ὥρ. ἀπὸ 7 δὲν ἀφαιρεῖται, ὅθεν ἀπὸ 24+7 ἤτοι ἀπὸ 31 ὥρ. μένουν 14 ὥρ. 1 τὸ κρατούμενον καὶ 23 κάμνουν 24 ἀπὸ 15 δὲν ἀφαιρεῖται, ὅθεν ἀπὸ 30 + 15 ἤτοι ἀπὸ 45 μένουν 21 ἡμ. 1 τὸ κρατούμενον καὶ 2 γίνονται 3 ἀπὸ 8 μένουν 5.

Παραδείγματα.

18 λίρ.	20 γρ.	25 παρ
5	50	38,75
12	77	26,25

10 στατ.	5 ὀκ.	0 $\frac{2}{3}$ δρ.
4	15	250 $\frac{1}{4}$ »
5	33	150 $\frac{5}{12}$ »

8 λίρ.	0 γρ.	0 παρ.
3	95	35
4	12	5

75°	0′	0′′
48°	32′	45′′
26°	27′	15′′

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

226. Καὶ εἰς τοὺς συμμιγεῖς τὸ *γινόμενον σχηματίζεται ἐκ τοῦ πολλαπλασιαστέου, ὅπως ὁ πολλαπλασιαστὴς ἐσχηματίσθη ἐκ τῆς ἀκεραίας μονάδος.*

Πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ ἀκέραιον.

227. Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι ἀκέραιος, πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου βλέπομεν πόσας μονάδας ἔχει οὗτος καὶ λαμβάνομεν τόσας φορὰς τὸν πολλαπλασιαστέον.

Ἂς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι πρόκειται νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ συμμιγὴς 4 ἡμ. 5 ὥρ. 35′ 45′′ ἐπὶ 3.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τὸ γινόμενον θὰ εἶναι

	4 ἡμ.	5 ὥρ.	35′	45′′
	4	5	35	45
	4	5	45	
ἤτοι	4×3 ἡμ.	5×3 ὥρ.	35′×3	45′′×3.

μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν δὲ τῶν πράξεων καὶ κατάταξιν τῶν μονάδων εὑρίσκομεν 12 ἡμ. 16 ὧρ. 47′ 15″.

Ἐκ τούτων συνάγομεν, ὅτι

228. *Συμμιγὴς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀκέραιον, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἕκαστον μέρος τοῦ συμμιγοῦς χωριστὰ καὶ κατόπιν καταταχθῶσιν αἱ διάφοροι μονάδες.*

Πρόβλημα. Ἐάν τις κερδίζῃ τὴν ἡμέραν 5 λίρ. 60 γρόσ. 30 παρ. πόσον κερδίζῃ εἰς 6 ἡμέρας;

Εἶναι φανερὸν ὅτι, ἂν τὴν ἡμέραν κερδίζῃ 5 λίρ. 60 γρόσ. 30 παρ. εἰς 6 ἡμέρ. θὰ κερδίζῃ ἐξ ὅλων ἑξαπλάσια ἤτοι

5 λίρ.	60 γρ,	30 παρ.	
		6	
30 λίρ.	360 γρ.	180 παρ.	ἢ μετὰ τὴν κατάταξιν τῶν μονάδων
33 »	40 »	20 »	

Πρόβλ. Ἐὰν διὰ μίαν ἐνδυμασίαν χρειαζώμεθα 8 ὑάρδ. 2 πόδ. 7 δακτύλους ὑφάσματος, πόσον ὕφασμα χρειαζόμεθα διὰ 8 ὁμοίας ἐνδυμασίας; Ἀπ. 70 ὑάρδ. 2 ποδ. 8 δακτ.

Πρόβλ. Ἐὰν εἰς ἓν βαρέλιον χωρῶσι 6 στατ. 25 ὀκ. 300 δρ. ζακχάρεως, πόσον χωροῦσιν εἰς 7 βαρέλια;

Ἀπ. 46 στ. 4 ὀκ. 100 δράμια.

Πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ κλασματικήν τινα μονάδα.

(Διαίρεσις συμμιγοῦς δι' ἀκεραίου).

229. Ἂν πολλαπλασιαστὴς εἶναι κλασματική τις μονάς, οἷον $\frac{1}{5}$, ἐπειδὴ οὗτος ἐσχηματίσθη ἐκ τῆς μονάδος 1, ἀφοῦ αὕτη διῃρέθη εἰς πολλὰ ἴσα μέρη (ἐνταῦθα εἰς 5), καὶ τὸ γινόμενον θὰ σχηματισθῇ ἐκ τοῦ συμμιγοῦς, ἂν οὗτος διαιρεθῇ ὁμοίως (ἐνταῦθα διὰ 5). Ἂς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν συμμιγῆ 17 στατ. 41 ὀκ. ἐπὶ $\frac{1}{5}$, ἤτοι νὰ διαιρέσωμεν αὐτὸν διὰ 5. Καθὼς εἰς πᾶσαν διαίρεσιν οὕτω καὶ ἐνταῦθα θὰ διαιρέσωμεν ἕκαστον μέρος τοῦ ἀριθμοῦ διὰ 5.

Διάταξις τῆς πράξεως.

```
στατ. ὀκ.
 17  41 | 5
        |____________
          στατ. ὀκ.
  2         3   25 4/5
×44
_____
 88 ὀκ.
+41 »
_____
129 »
 29
  4
```

Διαιροῦντες τοὺς 17 στατ. διὰ 5 εὑρίσκομεν πηλίκον 3 στατ. καὶ ὑπόλοιπον 2 στατ. τοὺς ὁποίους τρέπομεν εἰς 2×44 ἤτοι 88 ὀκ. Αὗται μετὰ τῶν 41 ὀκάδ. τοῦ συμμιγοῦς γίνονται 129 ὀκ. ταύτας διαιροῦντες διὰ 5 εὑρίσκομεν πηλίκον 25 ὀκ. καὶ ὑπόλοιπον 4 ὀκ. τὰς 4 ὀκ. ἢ τρέπομεν εἰς δράμια καὶ ἐξακολουθοῦμεν τὴν διαίρεσιν ἢ γράφομεν ὡς κλάσμα $\frac{4}{5}$ ὀκ., ὅτε θὰ ἔχωμεν 7 στατ. 41 ὀκ. $=$ 3 στατ. $25\frac{4}{5}$ ὀκ.

Πρόβλ. Ἐὰν 15 ἄνθρωποι μοιρασθῶσι 32 λίρ. 87 γρόσ. 34 παρ. πόσα θὰ λάβῃ ἕκαστος;

Διάταξις τῆς πράξεως.

```
λιρ. γρ. παρ.
 32  87  34 | 15
             |____________
               λιρ. γρ. παρ.
  2             2   20  10 4/15
108
_____
216 γρ.
+87 »
_____
303 »
 03 »
×40
_____
120
+34
_____
154
 04
```

Διὰ νὰ μοιρασθῶσιν οἱ 15 ἄνθρωποι 32 λίρ. 87 γρόσ. 34 παρ. εἶναι φανερόν, ὅτι θὰ μοιρασθῶσι χωριστὰ τὰς 32 λίρ. χωριστὰ τὰ 87 γρόσ. καὶ χωριστὰ τοὺς 34 παρ. Ἐὰν μοιρασθῶσι τὰς 32 λίρας οἱ 15 ἄνθρωποι, εὑρίσκομεν ὅτι ἕκαστος θὰ λάβῃ 2 λίρ. θὰ μείνῃ δὲ καὶ ὑπόλοιπον 2 λίρ. τὰς ὁποίας, ἐπειδὴ δὲν δύνανται νὰ μοιράσωσιν οἱ 15, τρέπουσιν εἰς 216 γρόσ. καὶ 87 γρόσ. τὰ ὑπάρχοντα ἐν τῷ συμμιγεῖ, τὸ ὅλον θὰ μοιράσουν 303 γρόσ. καὶ θὰ λάβῃ ἕκαστος 20 γρόσ., θὰ μείνῃ δὲ καὶ ὑπόλοιπον 3 γρόσ., τὰ ὁποῖα τρέπουσιν εἰς 120 παρ. Εἰς τούτους προσθέτοντες καὶ τοὺς 34 παρ. τοῦ συμμιγοῦς καὶ μοιράζοντες τὸ ἄθροισμα 154 λαμβάνουσιν ἕκαστος 10, μένει δὲ καὶ ὑπόλοιπον 4 παρ. Δυνάμεθα νὰ ἐξακολουθήσωμεν τὴν διαίρεσιν τρέποντες τοὺς 4 παρ. εἰς δέκατα, ἑκατοστά, κτλ. τοῦ παρᾶ.

Πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ κλάσμα.

230. Ἔστω ἤδη ἡ περίπτωσις, καθ' ἣν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι κλάσμα τι, οἷον $\frac{3}{4}$ ἐπειδὴ τοῦτο ἔγινεν ἐκ τῆς μονάδος 1 ληφθείσης τρὶς καὶ τοῦ τριπλασίου ταύτης, ἤτοι τοῦ 3, ἀφοῦ ἐλήφθη τὸ τέταρτον, πρὸς σχηματισμὸν τοῦ γινομένου θὰ λάβωμεν τὸ τριπλάσιον τοῦ πολλαπλασιαστέου καὶ τοῦ τριπλασίου τὸ τέταρτον. Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι πρόκειται νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν συμμιγῆ 3 ἡμέρας 5 ὥρας 35′ ἐπὶ $\frac{3}{4}$ τὸ τριπλάσιον τοῦ πολλαπλασιαστέου εἶναι 3 ἡμ. ὥρ. 35×3 ἤτοι 9 ἡμ. 15 ὥρ. 105′, τὸ τέταρτον δὲ τούτων εἶναι 2 ἡμέραι, 9 ὧραι, 71′$\frac{1}{4}$.

Διάταξις τῶν πράξεων.

```
ἡμ. ὥρ.
 3  5   35′
         3
---------------
ἡμ. ὥρ.
 9 15 105′ |4
           |----------
 1            ἡμ. ὥρ.
×24            2  9  71′1/4
----
 24 ὥρ.
+15
----
 39 ὥρ.
  3 »
×60
----
 180′
+105′
----
 285′
  05′
   1
```

Πρόβλ. Μὲ μίαν λίραν ἀγοράζω 7 στατ. 25 ὀκ. 230 δράμια πράγματός τινος, πόσον θ' ἀγοράσω μὲ $\frac{3}{4}$ τῆς λίρας;

Ἀφοῦ μὲ 1 λίρ. ἀγοράζω 7 στατ. 25 ὀκ. 250 δρ.

» $\frac{1}{4}$ τῆς λίρ θ' ἀγοράσω $\frac{\text{7 στατ. 25 ὀκ. 250 δρ.}}{4}$

καὶ μὲ $\frac{3}{4}$ τῆς λίρας θ' ἀγοράσω $\frac{\text{(7 στατ. 25 ὀκ. 250 δρ.)} \times 3}{4}$

πολλαπλασιάζοντες πρῶτον ἐπὶ 3 καὶ διαιροῦντες τὸ γινόμενον διὰ 4 εὑρίσκομεν μετὰ τὴν κατάταξιν 5 στατ. 30 ὀκ. 87,5 δράμια.

Πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ μικτόν.

231, *Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι μικτός, ἢ τρέπομεν **αὐτὸν** εἰς κλάσμα καὶ πολλαπλασιάζομεν ὡς ἀνωτέρω, ἢ ἐπὶ τῇ βάσει **τοῦ** ὁρισμοῦ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εὑρίσκομεν τὸ γινόμενον,* **ὡς φαί**νεται εἰς τὸ ἀκόλουθον παράδειγμα. Ἔστω πρὸς εὕρεσιν τὸ γινόμενον τοῦ συμμιγοῦς 3 ὥρ. 15′ 32′′ ἐπὶ $5\frac{1}{3}$. Ἐπειδὴ ὁ πολλαπλασιαστὴς $5\frac{1}{3}$ ἔγινεν ἐκ τῆς μονάδος 1, ἀφοῦ αὕτη ἐλήφθη πεντάκις, καὶ ἔπειτα τὸ τρίτον αὐτῆς καὶ ἡνώσαμεν ταῦτα, οὕτω πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου θὰ λάβωμεν καὶ τὸν πολλαπλασιαστέον πεντάκις, ἤτοι θὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον (3 ὥρ. 15′ 32′′)$\times$5, ὅπερ εἶναι 15 ὥρ. 75′ 160′′, ἔπειτα θὰ εὕρωμεν τὸ τρίτον τοῦ πολλαπλασιαστέου, ὅπερ εἶναι 1 ὥρ. 5′ 10′′ $\frac{2}{3}$, καὶ θὰ προσθέσωμεν τὰ δύο ταῦτα.

15	ὥρ.	75′	160′′	
1	»	5′	$10\frac{2}{3}$	
16	»	80′	$170\frac{2}{3}$	ἢ κατατάσσοντες
17	»	22′	$50\frac{2}{3}$	

232. Ἐκ τούτων ἕπεται ὁ ἑξῆς κανών.

*Συμμιγῆ πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ μικτόν, ἐὰν τρέψωμεν τὸν **μικτὸν** εἰς κλασματικόν, ὅτε θὰ πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπὶ **κλάσμα**, ἢ θὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν συμμιγῆ χωριστὰ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον καὶ χωριστὰ ἐπὶ τὸ κλάσμα καὶ θὰ ἑνώσωμεν τὰ δύο γινόμενα.*

Πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ δεκαδικόν.

233. *Συμμιγῆ πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ δεκαδικόν, ἐὰν γράψωμεν τὸν δεκαδικὸν ὡς κλάσμα, ὅτε θὰ ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπὶ κλάσμα, ἢ ἂν πολλαπλασιάσωμεν ἕκαστον μέρος **τοῦ** συμμιγοῦς ἐπὶ τὸν δεκαδικὸν καὶ ἔπειτα κατατάξωμεν τὰς μονάδας.*

Παράδειγμα. Πολλαπλασιάζοντες τὸν συμμιγῆ 3 λίρ. 85 γρόσ. 32 παρ. ἐπὶ 3,75 εὑρίσκομεν 11,25 λίρ. 318,75 γρόσ. 120 παρ.

Τοῦ γινομένου τούτου κατατάσσομεν τὰς μονάδας οὕτω. Τὸ δεκαδικὸν μέρος 0,25 λίρ. τρέπομεν εἰς γρόσια πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ 108, ἤτοι διαιροῦντες (208) τὸ 108 διὰ 4 καὶ εὑρίσκομεν 27 γρόσ. ταῦτα προσθέτομεν εἰς τὰ 318,75 γρόσ. καὶ ἔχομεν 545,75 γρόσ. Τούτων τὸ δεκαδικὸν μέρος 0,75 τρέπομεν εἰς παράδες πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ 40 καὶ εὑρίσκομεν 30 παρ. τοὺς ὁποίους προσθέτοντες εἰς τοὺς 120 παρ. εὑρίσκομεν γινόμενον 11 λίρ. 345 γρόσ. 150 παρ. Τέλος κατατάσσοντες καὶ τὰς ἀκεραίας μονάδας εὑρίσκομεν 14 λίρ. 39 γρόσ. 30 παρ. καὶ ἔχομεν

3 λίρ. 85 γρόσ. 32 παρ. $\times$ 3,75 = 14 λίρ. 24 γρόσ. 30 παρ.

Πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ συμμιγῆ.

234. Ὅπως, ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι ἀκέραιός τις πολυψήφιος ἀριθμός, θεωροῦμεν αὐτὸν προερχόμενον ἐκ τῆς ἁπλῆς μονάδος 1 πολλάκις ληφθείσης καὶ οὐχὶ ἐκ μονάδων τῶν διαφόρων τάξεων, οἷον δεκάδων ἑκατοντάδων κτλ. ὅπως, ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι κλασματικὸς ἢ μικτός, θεωροῦμεν αὐτὸν προερχόμενον ἐκ τῆς ἁπλῆς μονάδος 1 καθ' ὡρισμένον τινὰ τρόπον, οὕτω καὶ ὅταν εἶναι συμμιγής, ὅτε περιέχει διαφόρους συγκεκριμένας μονάδας διαφόρων τάξεων ἀνεξαρτήτους ἀλλήλων, οἷον λίρας - γρόσια - παράδες, πρέπει, διὰ νὰ ἐφαρμώσωμεν τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ ἐκτελέσωμεν τὴν πρᾶξιν, νὰ λάβωμεν μίαν ἐξ αὐτῶν ὡς ἀρχικὴν καὶ πρὸς ταύτην νὰ τρέψωμεν ὅλας τὰς ἄλλας, ὅτε θὰ ἔχωμεν ἀριθμὸν ἀκέραιον ἢ κλασματικὸν τῆς μονάδος ταύτης. Ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου ὁδηγούμεθα πῶς πρέπει νὰ σχηματίσωμεν τὸ γινόμενον. Ἡ ἀρχικὴ μονάς, εἰς τὴν ὁποίαν τρέπομεν τὰς ἄλλας, εἶναι διάφορος εἰς ἕκαστον πρόβλημα καὶ ὁρίζεται καταλλήλως ἐν τῷ προβλήματι.

Τὰ τοιαῦτα προβλήματα λύονται ἁπλούστατα ἢ διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα ἢ διὰ τῆς μεθόδου τῶν ἁπλῶν μερῶν, ὡς φαίνεται εἰς τὰ ἑπόμενα παραδείγματα.

Πρόβ.1. Ἐὰν 1 πῆχ. ὑφάσματος ἀξίζει 12 γρόσ. πόσον ἀξίζουν

5 πήχ. καὶ 7 ρούπ. Τὸ πρόβλημα τοῦτο λύεται εὐκολώτατα ὡς ἓν ἁπλοῦν πρόβλημα τῶν τριῶν. 'Εὰν διατάξωμεν τὰ δεδομένα, εὐθὺς διακρίνομεν τὴν μονάδα, εἰς τὴν ὁποίαν θὰ τρέψωμεν τὸν συμμιγῆ.

Διάταξις. 1 πῆχ. ἀξίζει 12 γρόσ.
5 πήχ. 7 ρούπ. ἀξίζουν χ

Τρέποντες τοὺς ἐν τῇ πρώτῃ στήλῃ ἀριθμοὺς εἰς ὁμωνύμους, ἔστω εἰς πήχεις, θὰ ἔχωμεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα.

1 πῆχ. ἀξίζει 12 γρόσ.
$5\frac{7}{8}=\frac{47}{8}$ πήχ. ἀξίζουν χ

Λύσις 'Αφοῦ ὁ 1 πῆχ. ἀξίζει 12 γρόσ.
τὸ $\frac{1}{8}$ τοῦ πήχ. θὰ ἀξίζῃ $\frac{12}{8}$ »
καὶ τὰ $\frac{47}{8}$ τοῦ πήχ. θὰ ἀξίζουν $\frac{12\times 47}{8}$. ὅθεν $\chi = 70{,}50$.

Τὸ αὐτὸ πρόβλημα δυνάμεθα εὐκόλως νὰ λύσωμεν διὰ τῆς μεθόδου τῶν ἁπλῶν μερῶν οὕτω

Πρῶτον ἀναλύομεν τὰ 7 ρούπ. εἰς 4 ρούπ., τὰ ὁποῖα εἶναι $\frac{1}{2}$ τοῦ πήχ., εἰς 2 ρούπ., ἤτοι $\frac{1}{2}$ τῶν 4 ρουπ., καὶ εἰς 1 ρούπ. ὅπερ εἶναι $\frac{1}{2}$ τῶν 2 ρουπ.

Ἔπειτα σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς·

'Αφοῦ ὁ 1 πῆχ. ἀξίζει 12 γρόσ., οἱ 5 πήχ. θὰ ἀξίζουν πενταπλάσια, ἤτοι $12\times5=60$ γρόσ. Τὰ δὲ 4 ρούπ., ἤτοι τὸ ἥμισυ τοῦ ἑνὸς πήχεως, θὰ ἀξίζῃ τὸ $\frac{1}{2}$ τῶν 12, ἤτοι 6 γρόσ. καὶ τὰ 2 ρούπ., ἤτοι τὸ ἥμισυ τῶν 4 ρουπ. θ' ἀξίζουν τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ 6, ἤτοι 3 γρόσ. καὶ τὸ 1 ρούπ. θὰ ἀξίζῃ τὸ $\frac{1}{2}$ τῶν 3 γροσ., ἤτοι $1\frac{1}{2}$ γρόσ. ὅθεν οἱ

5 πήχ. καὶ 7 ρούπ. ἀξίζουν $50+6+3+1\frac{1}{2}$ γρόσ. $=70\frac{1}{2}$ γρόσ.

Διάταξις τῆς πράξεως.

	12 γρόσ.
	5 πήχ. 7 ρούπ.
οἱ 5 πήχ. ἀξίζουν	60 γρόσ.
τὰ 4 ρούπ. »	6 »
τὰ 2 ρούπ. »	3 »
καὶ τὸ 1 ρούπ. »	$1\frac{1}{2}$ »
τὸ ὅλον ἀξίζει	$70\frac{1}{2}$.

Πρόβλ. Ἐὰν 1 ρούπ. μεταξωτοῦ ὑφάσματος ἀξίζῃ 12 γρόσ. πόσον ἀξίζουν 5 πήχ. 7 ρούπ. ;

Διατάσσοντες τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος οὕτω·

τὸ 1 ρούπ. ἀξίζει 12 γρόσ.
5 πήχ. 7 » θ' ἀξίζωσι χ

καὶ τρέποντες τοὺς ἐν τῇ πρώτῃ στήλῃ ἀριθμοὺς εἰς ὁμωνύμους θὰ ἔχωμεν πρὸς λύσιν τὸ ἑξῆς πρόβλημα·

τὸ 1 ρούπ ἀξίζει 12 γρόσ.
τὰ 47 » ἀξίζουν χ· ὅθεν $\chi = 12 \times 47 = 564$.

Πρόβλημα. Ὁ πῆχυς ὑφάσματος τιμᾶται 5 γρόσ. 30 παρ. Πόσον τιμῶνται 7 πήχ. 6 ρούπ. ;

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο διὰ τῆς μεθόδου τῶν ἁπλῶν μερῶν σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς·

Ἀφοῦ ὁ 1 πῆχυς ἀξίζει 5 γρόσ. 30 παρ., οἱ 7 πήχ. ἀξίζουν ἑπταπλάσια, ἤτοι 35 γρόσ. 210 παρ. Τὰ δὲ 4 ρούπ., ἤτοι τὸ ἥμισυ τοῦ πήχεως ἀξίζει τὸ ἥμισυ τῶν 5 γροσ. 30 παρ., ἤτοι $2\frac{1}{2}$ γρόσ. καὶ 15 παρ. ἢ 2 γρόσ. καὶ 35 παρ. καὶ τὰ 2 ρούπ., ἤτοι τὸ ἥμισυ τῶν 4 ρουπ. θ' ἀξίζουν τὸ ἥμισυ τῶν 2 γροσ. 35 παρ., ἤτοι 1 γρόσ. 17,5 παρ. Ἐπομένως οἱ 7 πήχ. 6 ρούπ. ἀξίζουν τὸ ἄθροισμα 38 γρόσ. 262,5 παρ. ἢ μετὰ τὴν κατάταξιν τῶν μονάδων 44 γρόσ. 22,5 παρ.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται οὕτω·

5 γρόσ. 30 παρ.
7 πήχ. 6 ρούπ. (6ρ.=4ρ.+2ρ,)

οἱ 7 πήχ. ἀξίζουν 35 γρόσ. 210 παρ.
τὰ 4 ρούπ.$=\frac{1}{2}$ πήχ, » 2 γρόσ. 35 παρ.
τὰ 2 ρούπ.$=\frac{1}{2}$ τῶν 4 ρουπ. ἀξίζ. 1 γρόσ. $17\frac{1}{2}$ παρ.

ἄρα τὸ ὅλον ἀξίζει 38 γρόσ. $262\frac{1}{2}$ παρ.=44 γρ. 22,5 παρ.

Τὸ αὐτὸ πρόβλημα λύεται εὐκόλως, ἂν γράψωμεν τὴν ἀξίαν τοῦ ἑνὸς πήχεως, ἤτοι τὰ 5 γρόσ. 30 παρ. ὡς δεκαδικὸν οὕτω 5,75.

Διάταξις 5,75

	7 πήχ.	6 ρούπ.
οἱ 7 πήχ. ἀξίζουν	40,25 γρόσ.	
τὰ 4 ρούπ. »	2,875 »	
τὰ 2 ρούπ. »	1,4375 »	
	44,5625 » = 44 γρόσ. 22,5 παρ.	

Πρόβλημα. Ἡ ὀκὰ τῶν ἀνθράκων ἀξιζει 30 παρ., πόσον ἀξίζουν 350 δράμ.;

Τὰ 350 δράμ. εἶναι 200 δράμ. καὶ 100 δράμ. καὶ 50 δράμ. Ἕκαστος τούτων εἶναι ἁπλοῦν μέρος τοῦ ἄλλου, οἷον τὰ 200 δράμ. εἶναι $\frac{1}{2}$ τῆς ὀκᾶς, τὰ 100 δράμ. εἶναι $\frac{1}{2}$ τῶν 200 δραμ. καὶ τὰ 50 δράμ. εἶναι $\frac{1}{2}$ τῶν 100 δραμ. ἑπομένως ἀφοῦ ἡ μία ὀκὰ ἀξίζει 30 παρ. τὰ 200 δράμ. ἀξίζουν τὸ ἥμισυ τῶν 30 παρ. ἤτοι 15 παρ. τὰ δὲ 100 δράμια ἀξίζουν τὸ ἥμισυ τῶν 200 δραμ. ἤτοι 7,5 παρ. καὶ τὰ 50 δράμ. ἀξίζουν τὸ ἥμισυ τῶν 100 δραμ. ἢ 3,75· ὅθεν τὰ 250 ἀξίζουν 15+7,5+3,75 παρ.=26,25 παρ.

Διάταξις τῆς πράξεως. 30 παρ.

		350 δράμ.
τὰ 200 δράμ.=$\frac{1}{2}$ τῆς ὀκᾶς ἀξίζουν		15 παρ.
τὰ 100=$\frac{1}{2}$ τῶν 200 δραμ.	»	7,5
τὰ 50=$\frac{1}{2}$ τῶν 100 »	»	3,75
	τὸ ὅλον	26,25 παρ.

Πρόβλημα. Ἡ ὀκὰ φασολίων ἀξίζει 90 παρ., πόσον ἀξίζουν τὰ 250 δράμ.;

Λύσις. Ἀφοῦ ἡ ὀκὰ ἀξίζει 90 παρ. τὰ 200 δράμ. ἤτοι ἡ ἡμίσεια ὀκὰ θ' ἀξίζῃ τὸ ἥμισυ τῶν 90 παρ. ἤτοι 45 παρ., ἡ δὲ ἀξία τῶν 50 δραμ. ἤτοι τοῦ ἑνὸς τετάρτου τῶν 200 δραμ. θὰ εἶναι τὸ τέταρτον τῆς ἀξίας αὐτῶν δηλ. τῶν 45 παρ. ὅπερ εἶναι ἴσον πρὸς 11,25 παρ.

Διάταξις.		90 παρ.
		250 δράμ.
τὰ 200 δράμ.	($\frac{1}{2}$ τῆς ὀκᾶς)	45
τὰ 50 »	($\frac{1}{4}$ τῶν 200 δρ.)	11,25
ὥστε τὰ 250 δράμ. ἀξίζουν		56,25

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

Διαίρεσις δι' ἀκεραίου.

235. Συμμιγὴς διαιρεῖται δι' ἀκεραίου, ἐὰν ἕκαστον τῶν μερῶν τοῦ συμμιγοῦς διαιρεθῇ διὰ τοῦ ἀκεραίου (229).

Διαίρεσις διὰ κλάσματος.

236. Συμμιγὴς διαιρεῖται διὰ κλάσματος, ὅπως καὶ πᾶς ἀριθμός· ἐὰν δηλ. ἀντιστρέψωμεν τοὺς ὅρους τοῦ διαιρέτου καὶ ἐκτελέσωμεν πολλαπλασιασμὸν συμμιγοῦς ἐπὶ κλάσμα.

Παράδειγμα. Νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ διαίρεσις

15 ὑάρδ., 2 πόδ. 8 δάκτ. : $\frac{4}{5}$.

Ἀντιστρέφοντες τοὺς ὅρους τοῦ διαιρέτου καὶ πολλαπλασιάζοντες 15 ὑάρδ. 2 πόδ. 8 δακτ. ἐπὶ $\frac{5}{4}$ εὑρίσκομεν 19 ὑάρδ. 2 πόδ. 7 δακτ. Τοῦτο εἶναι τὸ πηλίκον τῆς δοθείσης διαιρέσεως. Πράγματι, ἐὰν τὸν ἀριθμὸν τοῦτον πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν διαιρέτην $\frac{4}{5}$, εὑρίσκομεν 15 ὑάρδ. 2 πόδ. 8 δακτ., ἤτοι τὸν διαιρετέον.

Σημ. 1) Ἡ διαίρεσις συμμιγοῦς διὰ κλασματικῆς μονάδος, οἷον διὰ τοῦ $\frac{1}{7}$, ἀνάγεται εἰς πολλαπλασιασμὸν ἐπὶ τὸν παρονομαστήν· διότι, ἐὰν ἀντιστρέψωμεν τὸ κλάσμα $\frac{1}{7}$, θὰ ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ $\frac{7}{1}$, ἤτοι ἐπὶ 7.

Σημ. 2) Διὰ νὰ διαιρέσωμεν διὰ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ, οἷον 5,3, γράφομεν αὐτὸν ὡς κλάσμα $\frac{53}{10}$ καὶ τότε πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ $\frac{10}{53}$.

Διαίρεσις διὰ συμμιγοῦς.

237. Ἐν τῇ περιπτώσει, καθ' ἣν πρόβλημά τι λύεται διὰ *μερισμοῦ*

καὶ ὁ διαιρέτης εἶναι συμμιγής, τότε τρέπομεν αὐτὸν εἰς ἀριθμὸν μιᾶς μονάδος τῆς ὑπὸ τοῦ προβλήματος ὁριζομένης. 'Εὰν δὲ τὸ πρόβλημα λύεται διὰ *μετρήσεως*, ὅτε διαιρετέος καὶ διαιρέτης εἶναι ὁμοειδεῖς, τότε τρέπομεν καὶ τοὺς δύο εἰς ἀριθμοὺς μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς μονάδος καὶ θὰ ἔχωμεν διαίρεσιν ἀκεραίων ἢ κλασματικῶν ἢ δεκαδικῶν.

'Αμφότερα ὅμως τὰ προβλήματα ταῦτα λύονται ἀσφαλῶς διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα, ὡς φαίνεται κατωτέρω.

Πρόβλ. Μὲ μίαν λίραν τουρκικὴν ἀγοράζομεν 3 τσεκία 150 χγ. ξύλα, πόσαι λίραι χρειάζονται διὰ ν' ἀγοράσωμεν 11 τσεκ. 100 χγ.

Διαταξις. 3 τσεκία 150 χγ. ἀξίζουν 1 λίρ.
11 » 100 χγ. » χ

Τρέποντες τὰ τσεκία εἰς χιλιόγραμμα εὑρίσκομεν ὅτι τὰ 3 τσεκ. 150 χγ. εἶναι 900 χγ. καὶ τὰ 11 τσεκ. 100 χγ. εἶναι 2850 χγ. Οὕτω θὰ ἔχωμεν πρὸς λύσιν τὸ ἑξῆς πρόβλημα·

900 χγ, 1 λίρ.
2850 » χ ὅθεν $\chi = 3,16\frac{2}{3}$ λίρ.

'Εὰν δὲ τρέψωμεν τὰ χιλιόγραμμα εἰς τσεκία, θὰ ἔχωμεν πρὸς λύσιν τὸ ἑξῆς πρόβλημα· 3,6 τσεκ. 1 λίρ.
11,4 » χ ὅθεν $\chi = 3,16\frac{2}{3}$.

Πρόβλ. 'Υφάντρια ὑφαίνει εἰς μίαν ὥραν 1 ὑάρδ. 2 πόδ. 8 δακτ. Πόσας ὥρας πρέπει νὰ ἐργασθῇ διὰ νὰ ὑφάνῃ 8 ὑάρδ. 10 δακτ. ;

Διάταξις. 1 ὑάρδ. 2 πόδ 8 δακτ. ὑφαίνει εἰς 1 ὥρ.
8 » 0 » 10 » θὰ ὑφάνῃ εἰς χ.

Τρέποντες τοὺς δύο συμμιγεῖς τοῦ πρώτου ποσοῦ εἰς ἀριθμοὺς μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς συγκεκριμένης μονάδος, οἷον εἰς δακτύλους, εὑρίσκομεν ὅτι, 1 ὑάρδ. 2 πόδ. 8 δάκτ. εἶναι 68 δάκτ. καὶ ὅτι 8 ὑάρδ. 10 δάκτ. εἶναι 298 δάκτ. Οὕτω θὰ ἔχωμεν πρὸς λύσιν τὸ πρόβλημα.

ἂν 68 δακτύλους ὑφαίνῃ εἰς 1 ὥρ.
298 δακτ. θὰ ὑφάνῃ εἰς χ ὅθεν $\chi = 4$ ὥρ. 22′ 56, 47′′.

Πρόβλ. Διὰ ν' ἀγοράσω 7 πήχ. 5 ρούπ. ὑφάσματος ἐπλήρωσα 35 γρόσ. 30 παρ. Πόσον ἀξίζει ὁ πῆχυς ;

Διάταξις. 7 πήχ. 5 ρούπ. ἀξίζουν 35 γρόσ. 30 παρ.
1 πῆχ. θὰ ἀξίζῃ χ

Τρέποντες τὰς δύο τιμὰς τοῦ πρώτου ποσοῦ εἰς τὴν αὐτὴν μονάδα, οἷον εἰς πήχεις, εὑρίσκομεν $7\frac{5}{8}=\frac{61}{8}$ καὶ θὰ ἔχωμεν πρὸς λύσιν τὸ πρόβλημα

$\frac{61}{8}$ πήχ. ἀξίζουν 35 γρ. 30 παρ.
1 » ἀξίζει χ

ἀφοῦ $\frac{61}{8}$ πήχ. ἀξίζουν 35 γρόσ. 30 παρ.
τὸ $\frac{1}{8}$ τοῦ πήχ. θ' ἀξίζῃ $\frac{35 \text{ γρόσ. } 30 \text{ παρ.}}{61}$
τὰ δὲ $\frac{8}{8}$ » θ' ἀξίζουν $\frac{(35 \text{ γρόσ. } 30 \text{ παρ.}) \times 8}{61}$ = 4 γρόσ. 27,54 παρ.

Πρόβλ. 45 ὀκ. 350 δράμ. πράγματός τινος ἀξίζουν 254 γρόσ. 35 παρ. Πόσον ἀξίζει ἡ ὀκά ;

Διάταξις. 46 ὀκ. 350 δράμ. ἀξίζουν 254 γρόσ. 35 παρ.
1 ὀκ. ἀξίζει χ

Τρέποντες τὰ δράμια εἰς ὀκάδας ἔχομεν πρὸς λύσιν τὸ πρόβλημα
$\frac{367}{8}$ ὀκ. ἀξίζουν 254 γρόσ. 35 παρ.
1 ὀκ. θ' ἀξίζῃ χ

Λύσις. $\frac{367}{8}$ ὀκ. ἀξίζουν 254 γρόσ. 35 παρ.
$\frac{1}{8}$ ὀκ. θ' ἀξίζῃ $\frac{254 \text{ γρόσ. } 35 \text{ παρ.}}{367}$
καὶ τὰ $\frac{8}{8}$ ὀκ. θ' ἀξίζουν $\frac{(254 \text{ γρόσ. } 35 \text{ παρ.}) \times 8}{367}$ = 5 γρόσ. 22 παρ.

Πρόβλ. Ἂν 8 πήχ. 3 ρούπ. ὑφάσματος ἀξίζουν 1 μετζήτιον, οἱ 32 πήχ. 5 ρούπ. πόσον θ' ἀξίζουν ;

Διάταξις. 8 πήχ. 3 ρούπ. ἀξίζουν 1 μετζ.
32 πήχ. 5 ρούπ. θ' ἀξίζουν χ

Τρέποντες τοὺς δύο συμμιγεῖς τοῦ πρώτου ποσοῦ εἰς τὴν αὐτὴν συγκεκριμένην μονάδα, ἔστω εἰς ρούπια, θὰ ἔχωμεν

67 ρούπ. ἀξίζουν 1 μετζ.

261 ρούπ. θ' ἀξίζουν χ· ὅθεν χ=3 μετζ. 17 γρόσ. 36 παρ.

Πρόβλ. Ὁδοιπόρος ἐὰν εἰς 1 ὥρ. 20′ 30″ διατρέχῃ 1 γεωγρ. μίλιον εἰς 5 ὥρ. 45′ 56″ πόσον θὰ διατρέξῃ ;

Διάταξις. Ἀφοῦ εἰς 1 ὥρ. 20′ 30″ διατρέχει 1 γεωγρ. μίλιον
εἰς 5 ὥρ. 45′ 56″ θὰ διατρέξῃ χ

Τρέποντες τὰς δύο τιμὰς τοῦ χρόνου, ἤτοι τοὺς δεδομένους συμμιγεῖς εἰς ἀριθμὸν μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς συγκεκριμένης μονάδος, ἔστω εἰς δεύτερα λεπτά, θὰ ἔχωμεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα :

Ἀφοῦ εἰς 4830″ διατρέχει 1 γεωγρ. μίλιον
εἰς 20756″ θὰ διατρέξῃ χ

ὅθεν εὑρίσκομεν χ=4 γεωγρ. μίλ. 220 μέτρ. περίπου.

Πρόβλ. Ὑφάσματός τινος 10 ὑάρδ. 2 πόδ. ἠγοράσθησαν ἀντὶ 1 ἀγγλ. λίρ. Πόσον ἀξίζουν 3 ὑάρδ. 1 ποὺς ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος ;

Διάταξις. Ἀφοῦ 10 ὑάρδ. 2 πόδ. ἀξίζουν 1 ἀγγλ. λίρ.
3 ὑάρδ. 1 ποὺς θ' ἀξίζουν χ

Τρέποντες τὰς δύο τιμὰς τοῦ πρώτου ποσοῦ εἰς ἀριθμοὺς τῆς αὐτῆς μονάδος, ἔστω εἰς πόδας, εὑρίσκομεν ὅτι 10 ὑάρδ. 2 πόδ. εἶναι 32 πόδ., προσέτι αἱ 3 ὑάρδ. 1 ποὺς εἶναι 10 πόδ. καὶ θὰ ἔχωμεν πρὸς λύσιν τὸ ἑξῆς πρόβλημα :

Ἀφοῦ 32 ἀγγλ. πόδες ἀξίζουν 1 ἀγγλ. λίρ.
οἱ 10 » » θ' ἀξίζουν χ· ὅθεν χ=6 σελ. 3 πένν.

Πρόβλ. Ἠγοράσθησαν ἐν Μιτυλήνῃ 30 λαγύνια 4 ὀκ. ἐλαίου ἀντὶ 960 γροσ. Πόσον ἀξίζει ἡ ὀκά ;

Διάταξις. 30 λαγ. 4 ὀκ. ἀξίζουν 960 γρόσ.
1 ὀκ. ἀξίζει χ

Τρέπομεν τὰ λαγύνια εἰς ὀκάδας καὶ θὰ ἔχωμεν πρὸς λύσιν τὸ πρόβλημα

Ἂν 191,5 ὀκ. ἀξίζουν 900 γρόσ.,

ἡ 1 ὀκ. ἀξίζει χ ὅθεν χ=5 γρόσ. περίπου.

Πρόβλ. Ἐὰν μὲ 7 μετζ. 15 γρόσ. ἀγοράζῃ τις 15 χγ. βουτύρου, πόσον ἀγοράζει μὲ 1 μετζήτιον ;

Διάταξις. Μὲ 7 μετζ. 15 γρόσ. ἀγοράζει 15 χγ.

1 μετζ. » χ

ὅθεν $\chi = \frac{15}{7.75} =$ 1,936, ἤτοι 1 χγ. 936 γραμμ.

ΠΕΡΙ ΠΥΚΝΟΤΗΤΟΣ[1]

Ὁρισμός.

228. *Πυκνότης ἢ εἰδικὸν βάρος* σώματός τινος λέγεται τὸ βάρος εἰς χιλιόγραμμα μιᾶς λίτρας τοῦ σώματος· οὕτω :

Μία λίτρα ὕδατος ἀπεσταγμένου καὶ θερμοκρασίας 4° ἔχει βάρος ἓν χιλιόγραμμον. Ἄρα ἡ πυκνότης τοῦ ὕδατος εἶναι 1. Μία λίτρα σιδήρου ἔχει βάρος 7,788 χγ., τοῦτο εἶναι ἡ πυκνότης ἢ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ σιδήρου κτλ.

Προβλήματα.

1) Ἡ βάσις δωματίου ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου μήκους 6 πήχ. καὶ 7 ρουπ. πλάτος δὲ 8 πήχ. 6 ρουπ., πόσοι τετραγ. πήχεις εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ δωματίου ; Ἀπ. 60.15.

Ὁδηγία. Ἐπειδὴ τὸ ἐμβαδὸν ζητεῖται εἰς τετραγωνικοὺς πήχεις, πρέπει τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος νὰ ἐκφρασθῶσιν εἰς πήχεις, διὰ τοῦτο τρέπομεν πρῶτον τοὺς συμμιγεῖς εἰς τὴν μονάδα ταύτην.

2) Πόσων λιτρῶν εἶναι ὁ ὄγκος σιδηροῦ ἀγάλματος, τοῦ ὁποίου τὸ βάρος εἶναι 77,88 χιλιόγραμμα ; Ἀπ. 10 λίτρ.

Ὁδηγία. Εἶναι τόσαι λίτραι, ὅσας φορὰς τὸ βάρος μιᾶς λίτρας τοῦ δοθέντος ἀγάλματος εἰσχωρεῖ εἰς ὅλον τὸ βάρος αὐτοῦ.

3) Πόσον εἶναι τὸ βάρος μαρμαρίνης στήλης ἐχούσης ὄγκον 1130 λίτρ. καὶ εἰδικὸν βάρος 2,84 ; Ἀπ. 3209,20 χγ.

1 Ἰδὲ Φυσικὴν Ἀλ. Εὐσταθιανοῦ σελ. 66—71.

Ὁδηγία. Ἡ μία λίτρα ἔχει βάρος 2,84, ἄρα αἱ 1130 θὰ ἔχωσι 3209,20 χγ.

Προσθήκη. Νὰ τραπῶσι τὰ 3209,20 χγ. εἰς ὀκάδας καὶ δράμια.

Ἀπ. 2503 ὀκ. 70,4 δράμια.

4) Ἐὰν ἡ ὀκὰ τῆς ζακχάρεως ἀξίζῃ 4 γρόσ. 10 παρ., πόσον ἀξίζουν 5 ὀκ. 250 δράμια; Ἀπ. 23 γρόσ. 36 παρ.

5) Ἐὰν μία ὀκὰ ὀρύζης ἀξίζῃ 3 γρόσ. 10 παρ., πόσον ἀξίζει εἷς σάκκος, ὅστις ἔχει βάρος 45 ὀκάδων; Ἀπ. 146 γρόσ. 10 παρ.

Προσθήκη. Ὁ σάκκος οὗτος ἐστάλη ἐκ Τεργέστης καὶ ἔχουσι προστεθῇ εἰς αὐτὸν 35 γρόσ. διὰ μεταφοράν, τελωνεῖα καὶ ἄλλα ἔξοδα καὶ 38 γρόσ. κέρδος· πόσα φιορίνια εἶναι ἡ ἀρχικὴ ἀξία; Ἀπ. 6,17 φιορ. περίπου.

6) Ἐὰν 15 ὀκ. 250 δράμ. μετάξης ἀξίζουν 12 λίρ. τουρκ., πόσον ἀξίζουν 7 ὀκ. 320 δράμια; Ἀπ. 5 λίρ. τουρκ. 106 γρόσ. 38 παρ. περίπου.

7) Ἐὰν νῆμα μάλλινον πωλῆται 6 παρ. τὸ δράμιον, πόσα γρόσια ἀξίζουν 157 δράμια; Ἀπ. ~~3 λίρ.~~ 23 γρόσ. 22 παρ.

8) Ἡ ὀκὰ τοῦ μαλλίου ἀξίζει 20 γρόσ., πόσας ὀκάδας καὶ πόσα δράμια ἀγοράζω μὲ 15 εἰκοσάφραγκα; Ἀπ. 71 ὀκ. 100 δράμια.

9) Γεωργὸς ἔσπειρε σῖτον εἰς ἀγρὸν 60 νέων στρεμμάτων, παρήγαγε δὲ ἕκαστον στρέμμα 1,75 κοιλὰ σίτου. Ἐὰν πωλήσῃ τὸν σῖτον τοῦτον πρὸς 80 γρόσ. τὸ κοιλόν, πόσας λίρας, πόσα μετζήτια καὶ πόσα γρόσ. θὰ λάβῃ;

Ἀπ. 77 λίρ. 4 μετζ. 4 γρόσ.

10) Ἐὰν ἀγροῦ τινος ἓν νέον στρέμμα παράγῃ 1,80 κοιλὰ σίτου, πόσον παράγει ἓν ἑκτάριον; πόσον ἓν παλαιὸν στρέμμα; πόσον ἕκαστον ἄρ τοῦ αὐτοῦ ἀγροῦ;

Ἀπ. Παράγουσι τὸ ἑκτάρ. 18 κοιλά, τὸ παλ. στρέμμα 2,28 κοιλ., τὸ ἄρ 0,18 τοῦ κοιλοῦ.

Προσθήκη. Πόσαι λίτραι εἶναι 0,18 τοῦ κοιλοῦ; Ἀπ. 18.

11) Ἀγρός τις ἔχει ἔκτασιν 30 ἄρ, ἐχάραξαν δὲ διὰ μέσου αὐτοῦ ὁδὸν μήκους 130 πήχεων καὶ πλάτους 7 πήχ. 6 ρουπ., πόσος ἀγρὸς ἀπέμεινε;

Ἀπ. 2574,33 περίπου τετρ. μέτρα.

Ὁδηγία. Ἐπειδὴ τὸ ἄρ ἀναφέρεται εἰς τετραγωνικὰ μέτρα, εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁδοῦ εἰς τετραγωνικὰ μέτρα καὶ ταῦτα ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ ἀγροῦ. Διὰ ταῦτα τρέπομεν τοὺς πήχεις εἰς μέτρα.

12) Βαρέλιον πλῆρες οἴνου ἔχει βάρος 50 ὀκ. 250 δραμ. τὸ βαρέλιον

μόνον ἔχει βάρος 7 ὀκ. 350 δράμ., πόσον εἶναι τὸ βάρος τοῦ οἴνου καὶ πόσα γρόσ. ἀξίζει, ἐὰν πωλῆται 65 παρ. ἡ ὀκά; 'Απ. 69.47 γρόσ. ἀργύρ

13) 'Αντὶ 5 λιρῶν 48 γροσ. ἐπωλήθησαν εἰς ξυλαποθήκην 20 τσεκία καὶ 120 ὀκ. ξύλων· ἐὰν ἡ ἀποθήκη ἔχῃ 1500 τσεκία ξύλων, ἀντὶ πόσου θὰ πωληθῶσι ταῦτα; 'Απ. 396 λίρ. τουρκ. 17 γρόσ. 24 παρ. περίπου.

14) Ταξειδεύων τις εἰς διάφορα μέρη ἐδαπάνησεν ἐν Αὐστρίᾳ 350 φιορίνια, ἐν 'Αγγλίᾳ 20 λίρ. ἀγγλ. 15 σελ., ἐν Γερμανίᾳ 15 λίρ. γερμανικὰς 18 μάρκα. 'Εὰν εἶχε μαζί του 150 λίρας τουρκ., πόσαι τῷ ἀπέμειναν;

'Απ. 71 λίρ. 21 γρόσ.

15) 'Εάν τις δαπανᾷ καθ' ἑκάστην 60 παρ. διὰ καπνόν, πόσας λίρ. καὶ πόσα γρόσια δαπανᾷ κατ' ἔτος; 'Απ. 5 λίρ. 7 γρόσ. 20 παρ.

16) Κυρία τις διὰ 5 ρούπια δαντέλλας ἐπλήρωσε 3 γρόσια, πόσα θὰ πληρώσῃ ἀγοράζουσα 4 μέτρα 20 δακτύλους; 'Απ. 31 γρόσ. περίπου.

17) Πατὴρ ἀπέστειλε διὰ συγγενοῦς ταξειδεύοντος εἰς τὸν ἐν 'Αθήναις σπουδάζοντα υἱὸν 23,50 τουρκ. λίρ. 'Ο συγγενής, ἐπειδὴ δὲν εὗρεν ἀμέσως τὸν σπουδαστὴν καὶ ἔβλεπεν, ὅτι ἡ ἀξία τῆς λίρας ἐξέπιπτεν, ἀντήλλαξεν εἰς ἀργυραμοιβὸν τὰς λίρας διὰ τοῦ ἐν χρήσει χαρτονομίσματος πρὸς 34,25 δραχμὰς τὴν τουρκ. λίραν. Κατόπιν εὑρὼν τὸν σπουδαστὴν ἔδωκεν εἰς αὐτὸν 900 χαρτίνας δραχμ., ἐπειδὴ δὲν ἐπήρκουν εἰς αὐτὸν τὰ χρήματα, τὰ ὁποῖα ἔστειλεν ὁ πατήρ. 'Επιστρέψας δὲ εἰς τὴν πατρίδα ἐζήτησε παρὰ τοῦ γονέως τὰ περιπλέον. Πόσας λίρας θὰ πληρώσῃ περιπλέον ὁ πατήρ, ἐὰν ἡ σημερινὴ τιμὴ τῆς λίρας εἶναι 35 χάρτιναι δραχμαί; 'Απ. 2,72... λ. Τ.

18) 60 μίλια γεωγραφικὰ πόσα βέρστια καὶ πόσα μέτρα εἶναι;

'Απ. 417 βέρστ. καὶ 381 μέτρ.

19) 'Εργάτης εἰς 7 ὥρ. 50΄ ὑφαίνει 12 ὑάρδας, 2 πόδ. Δεύτερος ἐργάτης εἰς 5 ὥρ. 45΄ ὑφαίνει 8 μέτρα 7 παλάμ. 8 δακτ. Πόσους πήχ. οἱ δύο ἐργάται θὰ ὑφάνωσιν, ἐὰν ἕκαστος ἐργασθῇ ἐπὶ 3 ὥρας;

'Απ. 13 πήχ. 7 ρούπ.

20) 'Ηγόρασέ τις 50 κριμίτσες πρὸς 51 γρόσ. καὶ 15 παρ. χρυσᾶ, πόσας τουρκ. λίρας θὰ δώσῃ; 'Απ. $25,68\frac{3}{4}$.

21) 'Επώλησα 500 μετζήτια πρὸς 108 γρόσ. καὶ 5 παρ. τὴν λίραν· πόσας λίρας ἔλαβον; 'Απ. 92,4855 λίρ. τουρκ.

Προσθήκη. Νὰ τραπῶσι τὰ 0,4855 τουρκ. λίρ. εἰς ἀργυρᾶ γρόσια καὶ εἰς παράδες.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

ΠΕΡΙ ΜΕΘΟΔΩΝ

Λύσις προβλημάτων τινῶν τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

239. Τὰ προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν, καθὼς εἴδομεν ἐν σελ. 116, λύονται διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα.

Πρόβλημα. 28 μέτρα ὑφάσματος ἀξίζουν 112 γρόσ. πόσον ἀξίζουν 47 μέτρα τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος ;

Διάταξις. Τὰ 28 μέτρα ἀξίζουν 112 γρόσια
» 47 » » χ »

Παρατήρησις. Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο τὰ δοθέντα ποσὰ μέτρα καὶ γρόσια εἶναι ἀνάλογα· διότι διπλάσια μέτρα θὰ ἀξίζουν διπλάσια γρόσια καὶ τριπλάσια μέτρα ἀξίζουν τριπλάσια γρόσια κτλ.

Λύσις. Ἀφοῦ 28 μέτρα ἀξίζουν 112 γρόσ., ἐὰν τὰ μέτρα καὶ τὰ γρόσια διαιρεθῶσι διὰ τοῦ 28, εὑρίσκομεν, ὅτι

1 μέτρ. ἀξίζει $\frac{112}{28}$ γρόσ.

ἐὰν δὲ τὰ μέτρα καὶ τὰ γρόσια πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ 47, εὑρίσκομεν, ὅτι

τὰ 47 μέτρα ἀξίζουν $\frac{112\times47}{28}$

ὅθεν $\chi=\frac{112\times47}{28}=188$

Προσθήκη : Νὰ τραπῶσι 188 γρόσ. εἰς ρούβλια :

Ἀπ. $\chi=\frac{7{,}5\times188}{95}=14{,}84$

Πρόβλ. 95 γρόσ. ἰσοδυναμοῦν μὲ 8 φιορίνια, τὰ 475 γρόσ. μὲ πόσα φιορίνια ἰσοδυναμοῦν ;

Διάταξις 95 γρόσ. ἰσοδυναμοῦν μὲ 8 φιορ.
475 » » » χ »

Καὶ ἐνταῦθα τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, διότι εἰς διπλάσια ἢ τριπλάσια γρόσια θὰ ἀντιστοιχοῦν διπλάσια ἢ τριπλάσια φιορίνια.

Λύσις. Τὰ 95 γρόσ. ἰσοδυναμοῦν μὲ 8 φιορ.

Ἐὰν γρόσια καὶ φιορίνια διαιρεθῶσι διὰ 95, εὑρίσκομεν, ὅτι

τὸ 1 γρόσ. ἰσοδυναμεῖ μὲ $\frac{8}{95}$ φιορ.

Ἐὰν δὲ γρόσ. καὶ φιορίν. πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ 475, εὑρίσκομεν ὅτι τὰ 475 γρόσ. ἰσοδυναμοῦν μὲ $\frac{8 \times 475}{95} = 40$ φιορ.

Προσθήκη. Τὰ 40 φιορ. νὰ τραπῶσιν εἰς φράγκα.

Ἀπ. $\chi = \frac{20 \times 40}{8} = 100$ φράγκα.

Πρόβλ. Μὲ $\frac{3}{4}$ τοῦ μετζητιὲ ἀγοράζει τις $\frac{4}{5}$ τῆς ὀκᾶς· μὲ $\frac{7}{8}$ τοῦ μετζητιὲ πόσον θ' ἀγοράσῃ;

Διάταξις. Μὲ $\frac{3}{4}$ μετζητιὲ ἀγοράζει $\frac{4}{5}$ ὀκ.

» $\frac{7}{8}$ » » χ

Καὶ ἐνταῦθα τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα.

Λύσις. Τὸ $\frac{3}{4}$ διὰ νὰ γίνῃ 1 πρέπει νὰ διαιρεθῇ διὰ τοῦ ἑαυτοῦ του, ἤτοι διὰ $\frac{3}{4}$, ἀλλὰ τότε καὶ ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὰ $\frac{3}{4}$ μετζ. τιμὴ τοῦ ἑτέρου ποσοῦ, ἤτοι τὸ $\frac{4}{5}$, θὰ διαιρεθῇ διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ,

ἤτοι θὰ γίνῃ $\frac{\left(\frac{4}{5}\right)}{\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{4}{5} \times \frac{4}{3}$.

Καὶ ὅταν πάλιν τὸ 1 μετζ. πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ $\frac{7}{8}$ καὶ γίνῃ $\frac{7}{8}$ μετζ., τότε καὶ ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὸ 1 μετζ. τιμὴ τοῦ ἑτέρου ποσοῦ, ἤτοι τὸ $\frac{4}{5} \times \frac{4}{3}$, θὰ πολλαπλασιασθῇ καὶ αὐτὸ ἐπὶ $\frac{7}{8}$ καὶ θὰ γίνῃ $\frac{4}{5} \times \frac{4}{3} \times \frac{7}{8}$.

Διάταξις τῶν πράξεων. Ἀφοῦ μὲ $\frac{3}{4}$ μετζ. ἀγοράζει $\frac{4}{5}$ ὀκ.

» 1 » » $\frac{\left(\frac{4}{5}\right)}{\left(\frac{3}{4}\right)}$ »

καὶ μὲ $\frac{7}{8}$ μετζ. ἀγοράζει $\frac{\left(\frac{4}{5}\right) \times \left(\frac{7}{8}\right)}{\left(\frac{3}{4}\right)}$.

Ἐπειδὴ δὲ $\frac{\frac{4}{5} \times \frac{7}{8}}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{5} \times \frac{7}{8} : \frac{3}{4} = \frac{4}{5} \times \frac{7}{8} \times \frac{4}{3} = \frac{14}{15}$, ἕπεται ὅτι :

$$\chi = \frac{14}{15} \text{ όκ.}$$

Προσθήκη. Νὰ τραπῶσι τὰ $\frac{14}{15}$ τῆς ὀκᾶς εἰς δράμια.

'Απ. $\chi = 373\frac{1}{3}$ δράμια.

Πρόβλ. 15 πήχεις ὑφάσματος ἀξίζουν 8 λίρ. 45 γρόσ., $9\frac{1}{2}$ πήχεις τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος πόσον ἀξίζουν ;

Διάταξις 15 πήχ. ἀξίζουν 8 λίρ. 45 γρόσ.
$9\frac{1}{2}$ » » χ

Οἱ πήχεις καὶ τὰ χρήματα, τὰ ὁποῖα δίδει τις δι' αὐτούς, εἶναι ποσὰ ἀνάλογα.

Λύσις 'Αφοῦ 15 πήχ. ἀξίζουν 8 λίρ. 45 γρόσ.,
ὁ 1 » ἀξίζει $\frac{8 \text{ λιρ. } 45 \text{ γρόσ.}}{15}$

'Εὰν ὁ εἷς πῆχυς πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ $9\frac{1}{2}$, τότε θὰ γίνῃ $9\frac{1}{2}$ καὶ ἡ ἀξία αὐτοῦ θὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ $9\frac{1}{2}$ καὶ θὰ εὕρωμεν ὅτι :

$$\text{οἱ } 9\tfrac{1}{2} \text{ ἀξίζουν } \frac{8 \text{ λιρ. } 45 \text{ γρόσ.}}{15} \times 9\tfrac{1}{2}.$$

'Εὰν τὸν μικτὸν τρέψωμεν εἰς κλασματικὸν $\frac{19}{2}$ καὶ ἐπὶ τοῦτον πολλαπλασιάσωμεν, θὰ εὕρωμεν ὅτι:

$$\frac{8 \text{ λιρ. } 45 \text{ γρόσ.}}{15} \times 9\tfrac{1}{2} = \frac{8 \text{ λιρ. } 45 \text{ γρόσ.}}{15} \times \frac{19}{2}$$

ὅθεν ἔπεται, ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὰς πράξεις, ὅτι : $\chi = 5$ λίρ. $35\frac{7}{10}$ γρ.

Προσθήκη. Νὰ τραπῶσι τὰ 35 γρόσ. εἰς χρυσᾶ γρόσια, ἤτοι εἰς ἑκατοστὰ τῆς λίρας.

$$\text{'Απ.} \quad \chi = \frac{100 \times 35}{108} = 32\tfrac{11}{27}$$

Πρόβλ. 20 ἐργάται τελειώνουν ἔργον τι εἰς 8 ἡμέρας· πόσοι ἐργάται θὰ τελειώσουν τὸ αὐτὸ ἔργον εἰς 5 ἡμέρας ;

Διάταξις. Εἰς 8 ἡμ. τελειώνουν τὸ ἔργον 20 ἐργάται
εἰς 5 ἡμ. » » χ »

Παρατήρησις. Εἶναι φανερὸν ὅτι, διὰ νὰ τελειώσῃ τὸ ἔργον εἰς

4 ἡμέρας, χρειάζονται διπλάσιοι ἐργάται, ἤτοι 40 ἐργάται. Διὰ νὰ τελειώσῃ δὲ τὸ αὐτὸ ἔργον εἰς 16 ἡμέρας, χρειάζονται μόνον 10. Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν διαιρῆται διὰ 2 καὶ γίνηται 4, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 2 καὶ γίνεται 40. Ὅταν δὲ ἀντιστρόφως ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 2 καὶ γίνῃ 16, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν διαιρεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ καὶ γίνεται 10. Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν, ὅτι τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα.

Λύσις. Ἀφοῦ εἰς 8 ἡμ. τελειώνουν τὸ ἔργον 20 ἐργάται, εἰς 1 ἡμ. τελειώνουν τὸ αὐτὸ ἔργον ὀκταπλάσιοι, ἤτοι 20×8 ἐργάτ. καὶ εἰς 5 ἡμ. τὸ τελειώνουν πεντάκις ὀλιγώτεροι, ἤτοι $\frac{20 \times 8}{5}$ ἐργάτ.

ὥστε θὰ ἔχωμεν $\chi = \frac{20 \times 8}{5} = 32$.

Πρόβλ. Ἄνθρωπός τις δαπανᾷ καθ' ἑκάστην 25 γρόσ. καὶ διὰ τῶν χρημάτων, τὰ ὁποῖα ἔχει, ζῇ 5 μῆνας καὶ 10 ἡμέρας. Ἂν ἐδαπάνα 40 γρόσ. καθ' ἑκάστην, πόσον χρόνον θὰ ἤρκουν εἰς αὐτὸν τὰ χρήματά του;

Διάταξις τῶν δεδομένων.

Ὅταν δαπανᾷ 25 γρόσ. περνᾷ 5 μῆν. 10 ἡμ.

» » 40 γρόσ. θὰ περνᾷ χ

Παρατήρησις. Τὰ γρόσ., τὰ ὁποῖα δαπανᾷ καθ' ἑκάστην, καὶ ὁ χρόνος τὸν ὁποῖον περνᾷ μὲ αὐτά, εἶναι ποσὰ ἀντίστροφα· διότι, ὅταν δαπανᾷ διπλάσια γρόσια καθ' ἑκάστην, θὰ περάσῃ τὸν ἥμισυν χρόνον μὲ τὰ *ὡρισμένα χρήματα*, τὰ ὁποῖα ἔχει· καὶ ὅταν, ἀντιστρόφως, ἐλαττώσῃ τὴν καθημερινήν του δαπάνην εἰς τὸ ἥμισυ, τότε μὲ τὰ ἴδια χρήματα θὰ περάσῃ διπλάσιον χρόνον.

Λύσις. Ὅταν δαπανᾷ καθ' ἑκάστην 35 γρόσ., περνᾷ 5 μῆν. 10 ἡμ., ὅταν δὲ δαπανᾷ καθ' ἑκάστην 1 γρόσ., περνᾷ εἰκοσιπενταπλάσιον χρόνον ἢ (5 μῆν. 10 ἡμ.)$\times$25.

καὶ ὅταν δαπανᾷ 40 γρόσ., θὰ περνᾷ τεσσαράκοντα φορὰς ὀλιγώτερον χρόνον, ἤτοι $\frac{(5 \text{ μῆν. } 10 \text{ ἡμ.}) \times 25}{40}$.

ὥστε θὰ ἔχωμεν $\chi = \frac{(5 \text{ μῆν. } 10 \text{ ἡμ.}) \times 25}{40} = 3$ μῆν. 10 ἡμ.

240. Ἐκ τῆς τοιαύτης διατάξεως καὶ λύσεως τῶν ἀνωτέρω προβλημάτων συνάγομεν, ὅτι πρὸς λύσιν προβλήματός τινος διὰ τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν :

Γράφομεν εἰς ἕνα στίχον τὰς δύο ἀντιστοιχούσας τιμὰς τῶν δύο ποσῶν· ἔπειτα εἰς δεύτερον στίχον τὴν δεδομένην τιμὴν τοῦ ἑνὸς ποσοῦ καὶ τὴν ἀντιστοιχοῦσαν ζητουμένην τοῦ ἄλλου, τὴν ὁποίαν παριστῶμεν διὰ τοῦ γράμματος χ. Αἱ δύο τιμαὶ ἑκάστου ποσοῦ πρέπει νὰ εὑρίσκωνται ἡ μία ὑποκάτω τῆς ἄλλης. Τότε διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ἄγνωστον χ, χωρίζομεν τὰς δύο τιμὰς ἑκάστου ποσοῦ δι' εὐθείας καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸν ὑπεράνω τοῦ ἀγνώστου ἀριθμὸν ἐπὶ κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἀποτελοῦσιν αἱ δύο γνωσταὶ τιμαὶ τοῦ ἄλλου ποσοῦ χωριζόμεναι δι' εὐθείας, ἂν τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα, ἢ ἐπὶ τὸ αὐτὸ κλάσμα, ἀλλ' ἀντεστραμμένον, ἂν τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα.

Σημ. Πάντοτε ὑποτίθεται, ὅτι θὰ ἀνάγωμεν τὰς δύο γνωστὰς τιμὰς τοῦ ἑτέρου τῶν ποσῶν εἰς μίαν καὶ τὴν αὐτὴν μονάδα, ὅταν αὗται προέρχωνται ἀπὸ διαφόρους μονάδας.

Προβλήματα.

1) Ὑπάλληλος λαμβάνει 180 γρόσ. τὴν ἑβδομάδα, πόσα λαμβάνει δι' ἑκάστην ἐργάσιμον ἡμέραν ; 'Απ. 30 γρόσ.

Προσθήκη. Νὰ τραπῶσι 30 γρόσ. εἰς φράγκα. 'Απ. 6,31 φρ.

2) Βρύσις, ἐκ τῆς ὁποίας ρέουσιν 120 ὀκ. ὕδατος τὴν ὥραν, χρειάζεται 7 ὥρας διὰ νὰ πληρώσῃ δεξαμενήν τινα. Πόσον χρόνον χρειάζεται ἄλλη τις βρύσις νὰ πληρώσῃ τὴν αὐτὴν δεξαμενήν, ὅταν ἐξ ἀρχῆς ρέωσι 210 ὀκ. τὴν ὥραν ; 'Απ. 4 ὥρας.

3) Ράβδος ἔχουσα μῆκος 1,60 μέτρ. ὀρθὴ ρίπτει σκιὰν κατά τινα στιγμὴν 1,10 μέτρ. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος κυπαρίσσου, ἥτις ρίπτει σκιὰν 11,40 μέτρ. κατὰ τὴν αὐτὴν στιγμήν ; 'Απ. 16,58 μέτρ.

Προσθήκη. Νὰ τραπῶσι 16,58 μέτρ. εἰς πήχεις ἐνδεζέ.

'Απ. 25,53 πήχ.

4) Ἵππος τις τρώγει εἰς 6 ἡμέρας 18 χιλιόγραμμα κριθῆς· πόσας ὀκάδ. τρώγει εἰς 30 ἡμ.; 'Απ. 70,30 ὀκ.

5) Πρὸς ἐκτέλεσιν ἔργου τινὸς εἰς 27 ἡμέρας χρειάζονται 8 ἐργάται· πόσοι ἐργάται χρειάζονται διὰ νὰ ἐκτελέσωσι τὸ αὐτὸ ἔργον εἰς 12 ἡμέρας; 'Απ. 18 ἐργάται.

6) Εἰς πλοῖον οἱ ἐπιβάται ἔχουσι τροφὰς διὰ 20 ἡμέρ. ἐὰν γίνῃ ἀνάγκη μὲ τὰς αὐτὰς τροφὰς νὰ περάσουν 28 ἡμέρ., πόσον μέρος τοῦ σιτηρεσίου, τὸ ὁποῖον ἐλάμβανον πρὶν καὶ τὸ ὁποῖον παριστῶμεν διὰ τοῦ 1, πρέπει νὰ λαμβάνῃ ἕκαστος ;

Λύσις. Διὰ νὰ περάσουν 20 ἡμέρας, πρέπει νὰ λαμβάνῃ ἕκαστος 1 σιτηρέσιον· διὰ νὰ περάσουν 1 ἡμέραν πρέπει νὰ λάβῃ 1×20, ἤτοι 20 σιτηρέσια, καὶ διὰ νὰ περάσουν 28 ἡμέρας, πρέπει νὰ λαμβάνῃ $\frac{20}{28}=\frac{5}{7}$.

ὥστε $\chi=\frac{5}{7}$ τοῦ σιτηρεσίου.

7) Ἐὰν πρὶν ἐλάμβανον 300 δράμια ἄρτου, πόσα δράμια πρέπει νὰ λαμβάνωσι τώρα ; 'Απ. $214\frac{2}{7}$ δράμια.

8) Μηχανὴ κατασκευάζει 60 πήχ. ὑφάσματος εἰς 26 ὥρας, εἰς πόσας ὥρας θὰ κατασκευάσῃ 120 μέτρα ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος; Τὸν πῆχυν λαμβάνομεν 0,65 τοῦ μέτρου. 'Απ. 80 ὥρας.

6) Ἐὰν 100 κοιλὰ σίτου ἀξίζουν 9500 γρόσ., πόσας λίρας ἀξίζουν 563 κοιλὰ τοῦ αὐτοῦ σίτου ; 'Απ. $495{,}23\frac{4}{27}$.

10) 122 χιλιόγραμμα ἀλεύρου δίδουν 158,6 χγ. ἄρτου, πόσον ἄρτον θὰ δώσουν 50 χγ. ἀλεύρου ; 'Απ. 65.

Προσθήκη. Νὰ τραπῶσι 65 χγ. εἰς ὀκάδ. 'Απ. 50 ὀκ. 280 δράμ.

11) Ἕκαστον κυτίον πεννῶν περιέχει 12 δωδεκάδας, ἤτοι 144 πέννας καὶ ἀξίζει 7,5 γρόσ., πόσον ἀξίζουν 1000 πένναι ;

$\chi=52$ γρόσ. $3{,}3\frac{1}{3}$ παράδες.

12) 100 βαθμοὶ τοῦ θερμομέτρου τοῦ Κελσίου ἀντιστοιχοῦν πρὸς 80 βαθμοὺς τοῦ θερμομέτρου τοῦ Ρεωμύρου· 27 τοῦ Κελσίου πρὸς πόσους τοῦ Ρεωμύρου ἰσοδυναμοῦν ; $\chi=21{,}6$.

13) Ἐργάτης ἐτελείωσε $\frac{5}{8}$ ἔργου τινὸς εἰς 35 ἡμ., εἰς πόσας ἡμέρας θὰ τελειώσῃ τὸ ἐπίλοιπον ἔργον ; 'Απ. 21 ἡμέρας.

14) Διὰ νὰ ἐνδύσωμεν 120 ἀνθρώπους, ἐχρειάσθησαν 540 πήχ. ὑφάσματος· διὰ νὰ ἐνδύσωμεν 300 ἀνθρώπους ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος, πόσαι ὑάρδαι χρειάζονται ;

Λύσις. Εὑρίσκομεν πρῶτον πόσοι πήχεις χρειάζονται καὶ τούτους τρέπομεν εἰς ὑάρδας. Ἀπ. $964\frac{26}{91}$.

15) Ἀρτοπώλης ἐπρομήθευσεν εἰς κρεοπώλην 60 χγ. ἄρτου, τῶν ὁποίων ἕκαστον, ἤτοι εἷς ἄρτος, ἀξίζει 30 παρ., ὁ δὲ κρεοπώλης δίδει ἀντὶ χρημάτων κρέας, τοῦ ὁποίου τὸ χιλιόγραμμον ἀξίζει 3,3 γρόσ. Πόσα χιλιόγρ. κρέατος θὰ δώσῃ εἰς τὸν ἀρτοπώλην πρὸς ἀποπληρωμὴν τοῦ ἄρτου; Ἀπ. 13,63 χγ.

Ὁδηγία. Εὑρίσκομεν πρῶτον πόσον ἀξίζει ὅλος ὁ ἄρτος καὶ ἔπειτα μὲ τὰ χρήματα ταῦτα πόσον κρέας πρέπει νὰ λάβῃ.

16) 300 στρατιῶται κεκλεισμένοι ἐντὸς φρουρίου ἔχουσι τροφὰς δι' ὡρισμένον τινὰ χρόνον· ἔφθασε δὲ εἰς αὐτοὺς ἐπικουρία 100 στρατιωτῶν ἄνευ τροφῶν καὶ εἶναι ἀνάγκη νὰ περάσουν τὸν αὐτὸν χρόνον μὲ τὰς τροφάς, τὰς ὁποίας ἔχουν. Πόσον μέρος τοῦ ἀρχικοῦ σιτηρεσίου πρέπει νὰ λαμβάνῃ ἕκαστος στρατιώτης;

Λύσις. Ἂν τὸ σιτηρέσιον ἑκάστης ἡμέρας, ὅτε οἱ στρατιῶται ἦσαν 300, παρασταθῇ διὰ τοῦ 1, τότε ἕκαστος τῶν 400 στρατιωτῶν θὰ λαμβάνῃ $\frac{300}{400}$ ἤτοι $\frac{3}{4}$ τοῦ ἀρχικοῦ σιτηρεσίου.

17) 300 στρατιῶται πολιορκούμενοι ἐντὸς φρουρίου ἔχουσι τροφὰς διὰ 45 ἡμέρ., φθάνει δὲ εἰς αὐτοὺς ἐπικουρία 100 στρατιωτῶν μὲ 8 ἡμερῶν τροφάς· τί μέρος τοῦ ἑνὸς σιτηρεσίου πρέπει νὰ λαμβάνῃ τώρα ἕκαστος, διὰ νὰ περάσουν πάλιν 45 ἡμέρας;

Λύσις. Ἐπειδὴ ἕκαστος στρατιώτης ἐκ τῶν 300 εἰς 45 ἡμ. λαμβάνει 45 σιτηρέσια, οἱ στρατιῶται ἔχουν τὸ ὅλον $300 \times 45 = 13500$ σιτηρέσια, οἱ δὲ $100 \times 8 = 800$ σιτηρέσια, ὥστε οἱ 400 στρατιῶται ἔχουν 14300 διὰ νὰ περάσουν 45 ἡμέρας. Ἀλλὰ διὰ νὰ περάσουν οἱ 400 στρατιῶται 45 ἡμ. λαμβάνοντες ἓν σιτηρέσιον καθ' ἑκάστην, ἔπρεπε νὰ ἔχωσι 18000 σιτηρέσια, ἐνῷ ἔχουν μόνον 14300. Ἄρα ἕκαστος θὰ λαμβάνῃ τὰ $\frac{143}{180}$ τοῦ ἑνὸς σιτηρεσίου.

18) Πρὸς κάλυψιν τῶν τοίχων δωματίου χρειάζονται 20 κύλινδροι χάρτου, τοῦ ὁποίου τὸ πλάτος εἶναι 0,42 τοῦ μέτρ., ἐὰν οἱ κύλινδροι εἶχον πλάτος $\frac{1}{2}$ τοῦ μέτρου, πόσοι θὰ ἐχρειάζοντο; Ἀπ. $16\frac{4}{5}$.

19) Ἔμπορός τις ἤρχισεν ἐμπόριον καταθέσας 1500 γρόσ., πωλεῖ δὲ τὰ ἐμπορεύματα αὐτοῦ καὶ κερδίζει 25 γρόσ. ἀπὸ ἐμπορεύματα, τῶν ὁποίων ἡ ἀρχικὴ ἀξία εἶναι 100 γρόσ., πόσον θὰ κερδήσῃ ἐκ τῶν 1500 γροσ.; Ἀπ. 375.

Σημείωσις. *Ὅταν κεφάλαιον 100 μονάδων φέρῃ κέρδος 25* *ὁμοίων μονάδων, τότε λέγεται ὅτι τὸ κέρδος εἶναι 25 ἐπὶ τοῖς ἑκατὸν καὶ γράφεται 25 °/₀· ὁμοίως λέγεται 10 ἐπὶ τοῖς ἑκατόν, 15 ἐπὶ τοῖς ἑκατὸν καὶ γράφεται 10 °/₀, 15 °/₀.*

20) Ἔμπορός τις ἤρχισεν ἐργασίαν μὲ κεφάλαιον 1000 λιρῶν ὀθωμανικῶν καὶ ἐκέρδησε 18 ἐπὶ τοῖς ἑκατὸν ἐκ τῆς ἐπιχειρήσεως· πόσον ἐγένετο τὸ κεφάλαιον αὐτοῦ; Ἀπ. 1180.

21) Εἰς ἐμπορικὸν κατάστημα γίνεται ἔκπτωσις 15 °/₀· ἐὰν ἀγοράσῃ τις ἐμπορεύματα ἀξίας 5,60 λιρῶν, πόσων γροσίων ἔκπτωσις θὰ γίνῃ εἰς αὐτόν; Ἀπ. 90 γρόσ. $28\frac{4}{5}$ παρ.

22) Ἐὰν εἰς τὸ αὐτὸ κατάστημα μὲ τὴν ἰδίαν ἔκπτωσιν ἀγοράσῃ τις 230 φράγκων ἐμπορεύματα καὶ πληρώσῃ μὲ γρόσ., πόσα τοιαῦτα θὰ πληρώσῃ; Ἀπ. 928 γρόσ. 25 παρ.

Ὁδηγία. Εὑρίσκομεν πόσα φράγκα θὰ πληρώσῃ καὶ ταῦτα τρέπομεν εἰς γρόσια.

23) Λόγιός τις ἠσφάλισε τὴν βιβλιοθήκην του εἴς τινα ἑταιρείαν ἀντὶ 200 ἀγγλικῶν λιρῶν, πληρώνει δὲ κατ' ἔτος ἀσφάλιστρα 2 ἐπὶ τοῖς χιλίοις· πόσα γρόσ. ἐν ὅλῳ θὰ πληρώνῃ καθ' ἕκαστον ἔτος; Ἀπ. 48.

24) Ἔμπορός τις ἠγόρασεν ὕφασμα πρὸς 15 φράγκα τὸ μέτρον· πόσα γρόσ. τὸν πῆχυν πρέπει νὰ πωλῇ, διὰ νὰ κερδίσῃ 30 τοῖς ἑκατόν;

Ἀπ. 60,2 γρόσ.

Ὁδηγία. Εὑρίσκομεν πρῶτον πόσα γρόσ. ἀξίζει ὁ πῆχυς καὶ εἰς τὴν τιμὴν ταύτην ἔπειτα προσθέτομεν 30 °/₀.

25) Ἔμπορος πτωχεύσας δίδει εἰς τοὺς πιστωτὰς αὐτοῦ 40 °/₀· πόσα ἀργυρᾶ γρόσ. θὰ λάβῃ πιστωτής, εἰς τὸν ὁποῖον ὀφείλει 376 λίρας;

Ἀπ. 16243,20 γρόσ.

26) Ἀρχιτέκτων ἠγόρασεν οἰκόπεδον πρὸς 32 γρόσ. ἕκαστον τετραγωνικὸν μέτρον, μετά τινα δὲ χρόνον ἐπώλησεν αὐτὸ πρὸς 26 γρόσ. τὸν τετρ. τεκτον. πῆχυν. Πόσα τοῖς ἑκατὸν ἐκέρδησε; Ἀπ. $44\frac{4}{9}$ °/₀.

Λύσις. Ἀφοῦ τὸ ἓν μέτρον, ἤτοι τὰ $\frac{16}{9}$ τοῦ τετρ. τεκτον. πήχ., ἠγόρασε 32 γρόσ., εὐκόλως εὑρίσκεται πόσον ἠγόρασε τὰ $\frac{9}{9}$, ἤτοι τὸν ἕνα τετρ. τεκτον πῆχ., καὶ ἔπειτα τὸ κέρδος.

27) Ἐμπορεύματα ἀξίας 5000 φρ. βραχέντα κατὰ τὴν μεταφορὰν ἕνεκα τρικυμίας ἐπωλήθησανν εἰς Τεργέστην ἀντὶ 1400 φιορινίων· πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐγένετο ἔκπτωσις; Ἀπ. 30 °/₀.

28) Ἔμπορος ἠγόρασεν οἰκόπεδον 279 τετρ. μέτρων πρὸς 12 φράγκα τό τετρ. μέτρ. ἐπώλησε δὲ 224 τετρ. τεκτον. πήχ. ἀντὶ 672 μετζητιέδων, τὸ δὲ ὑπόλοιπον ἔδωκεν ἀντὶ μιᾶς κριμίτσας τὸν τετρ. τεκτον. πῆχ. ἐκέρδισεν ἢ ἐζημιώθη, καὶ πόσον τοῖς ἑκατόν; Ἀπ. ἐκέρδησε, $80{,}29\,{}_0/{}^0$.

Ὁδηγία. Εὑρίσκομεν πόσα φράγκ. ἀξίζει ὅλον τὸ οἰκόπεδον, ἔπειτα τρέπομεν τὴν ἀξίαν ταύτην εἰς γρόσια καὶ τὸ οἰκόπεδον εἰς τετρ. τεκτον. πήχ. Ὕστερον εὑρίσκομεν πόσον ἔλαβεν ἐξ ἑκάστου μέρους, τὸ ὁποῖον ἐπώλησεν, ὅθεν τὸ κέρδος.

29) Κηπουρὸς ἠγόρασε κῆπον 7 παλ. στρεμ. πρὸς 500 φράγκα τὸ στρέμμα· μετά τινα δὲ χρόνον μετεπώλησεν αὐτὸν κερδίζων $35\,{}_0/{}^0$. Πόσα φρ. μετεπώλησεν ὅλον τὸν κῆπον καὶ πόσας λίρ. τουρκ. τὸ νέον στρέμμα;

Ἀπ. Μετεπώλησεν ὅλον τὸν κῆπον 4725 φρ., ἕκαστον δὲ νέον στρέμμα 23,33 λίρας τουρκ. περίπου.

Ὁδηγία. Εὑρίσκομεν τὴν ὁλικὴν ἀξίαν τοῦ κήπου εἰς φράγκα, τὰ ὁποῖα τρέπομεν εἰς λίρας. Ἔπειτα εὑρίσκομεν τί κέρδος ἀντιστοιχεῖ εἰς ταῦτα πρὸς 35%. Τὸ ἄθροισμα εἶναι ἡ ὁλικὴ ἀξία τῆς μεταπωλήσεως. Μετὰ ταῦτα τρέποντες τὰ παλαιὰ στρέμματα εἰς νέα καὶ διαιροῦντες τὴν ἀξίαν διὰ τούτων εὑρίσκομεν τὴν ἀξίαν τῆς πωλήσεως ἑκάστου στρέμματος.

30) Κυρία τις ἠγόρασεν ἀντὶ 15 γρόσ ὕφασμα, τοῦ ὁποίου ἡ πραγματικὴ ἀξία εἶναι 4 φρ, πόσον τοῖς ἑκατὸν τῇ ἐγένετο ἔκπτωσις;

Ἀπ. $21{,}05\%$.

31) Πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐκέρδισεν ἡ αὐτὴ κυρία; Ἀπ. $26{,}66\%$.

32) Μεσίτης λαμβάνει 2% ἀμοιβὴν ἐκ τῆς πωλήσεως ἐμπορευμάτων ἀξίας 5000 φρ., πόσα τὸ ὅλον ἔλαβεν ὡς μεσιτείαν; Ἀπ. 100 φρ.

34) Κύριός τις πληρώνει εἰς ἀσφαλιστικὴν ἑταιρείαν πρὸς ἀσφάλειαν τῶν ἐπίπλων του 1,75 ἐπὶ τοῖς χιλίοις· πόσα τὸ ὅλον θὰ πληρώνῃ κατ' ἔτος, ἐὰν τὰ ἔπιπλα αὐτοῦ ἐκτιμηθῶσι 7985 φράγκα; Ἀπ. 13,97.

35) Πλοίαρχός τις πληρώνει πρὸς ἀσφάλειαν τοῦ πλοίου του ἐκ τῶν τρικυμιῶν εἰς ἀσφαλιστικήν τινα ἑταιρείαν 3289,5 ρούβλια· τὸ πλοῖον ἔχῃ ἀξίαν 250,0 00 φρ., πόσον τοῖς ἑκατὸν πληρώνει ἀσφάλιστρα;

Ἀπ. $3{,}50\%$.

36) 2 παλαιὰ στρέμματα ἀγροῦ παράγουσι 1500 ὀκ. σίτου, πόσα χιλιόγραμμα παράγουσι 45 ἄρ; Ἀπ. 3401,57.

Ὁδηγία. Τρέπομεν πρῶτον τὰ στρέμματα καὶ τὰ ἄρ εἰς τετρ. μέτρα, τὰς δὲ ὀκάδας εἰς χιλιόγρ., ἔπειτα εὐκόλως λύομεν τὸ πρόβλημα.

37) Καπνέμπορος ἠγόρασε 1500 λιρῶν καπνὰ ἐκ Ξάνθης πρὸς 40 γρόσ. τὴν ὀκάν. Ἐκ τούτων ἐκαθαρίσθησαν 60% ἐπὶ τοῦ βάρους ὡς καλῆς ποιότητος, τὰ δὲ λοιπὰ ἀπερρίφθησαν ὡς ἄχρηστα. Ἐὰν ἐπὶ τῶν ἐκκαθαρισθέντων πληρώνῃ ὁ καπνέμπορος εἰς τὴν ἑταιρείαν τοῦ μονοπωλείου (Régie) 3 γρόσ. φόρον κατ' ὀκὰν καὶ σιδηροδρομικὰ πρὸς ἀποστολὴν εἰς Βουκουρέστιον 10 παρ. τὸ χιλιόγραμμον, ὅπου πωλεῖ τὸν καπνὸν τοῦτον πρὸς 18 φρ. τὸ χιλιόγραμμον, πόσας λίρας τουρκ. κερδίζει τὸ ὅλον καὶ πόσα ἐπὶ τοῖς ἑκατόν;

Ἀπ. α' 887,70 λίρ. β' 59,18%.

Ὁδηγία. Τρέπομεν τὰς λίρας εἰς γρόσ. ἀργυρᾶ (λίρ. 108) καὶ ἔπειτα εὑρίσκομεν πόσας ὀκάδας καπνοῦ ἠγόρασε μὲ ταῦτα, καὶ πόσαι ὀκάδες καλῆς ποιότητος ἔμειναν, ἀφοῦ ἐξεκαθαρίσθη τὸ ἀγορασθέν· ὕστερον εὑρίσκομεν πόσον ἐπλήρωσε διὰ φόρον καὶ δι' ἀποστολὴν εἰς Βουκουρέστιον καὶ προσθέτομεν ὅσα ἐδαπάνησε μὲ τὰ ἔξοδα τῆς ἀγορᾶς. Ἔπειτα τρέπομεν τὰς ὀκάδας εἰς χιλιόγραμμα καὶ τὴν τιμὴν τῆς πωλήσεως εἰς γρόσια καὶ εὑρίσκομεν πόσα γρόσ. ἐπώλησε τὸ πρᾶγμα. Ἐκ τῆς δαπάνης καὶ τῆς εἰσπράξεως εὑρίσκομεν τὸ κέρδος καὶ τὸ πόσον ἐπὶ τοῖς 100.

38) Ἔφερέ τις ἐξ Ἄργους ἀγκινάρας 15 κόφας, ἑκάστη τῶν ὁποίων περιέχει 250 ἀγκιν. Ὁ κομιστὴς ἠγόρασε 4 δραχμ. χαρτίνας τὰς 100 ἀγκιν., ἐπλήρωσε δὲ πρὸς μεταφορὰν 1 φράγκ. τὴν κόφαν καὶ διὰ τελωνεῖον 8% ἐπὶ τῆς ἀξίας, ἀφοῦ ἐξετιμήθησαν 20 γρόσ. αἱ 100 ἀγκ. Ἐὰν πωλήσῃ ταύτας 10 παρ. ἑκάστην, θὰ κερδήσῃ ἢ θὰ ζημιωθῇ καὶ πόσον;

Ἀπ. Θὰ κερδήσῃ 158,25 γρόσ.

Ὁδηγία. Εὑρίσκομεν πόσας ἀγκινάρας ἠγόρασε τὸ ὅλον καὶ πόσας χαρτίνας δραχμὰς ἐπλήρωσε πρὸς ἀγοράν. Τὰς δραχμὰς ταύτας τρέπομεν εἰς λίρας ὑπολογίζοντες τὴν τουρκ. λίρ. 25 χαρτ. δραχμ. καὶ ἔπειτα τὰς λίρ. εἰς γρόσ. Εὑρίσκομεν πόσα γρόσ. ἐπλήρωσε διὰ ναῦλον, πόσον ἐξετιμήθη ὅλον τὸ ἐμπόρευμα εἰς τὸ τελωνεῖον καὶ πόσον ἐπλήρωσε τὸ ὅλον τελωνειακὸν φόρον καὶ προσθέτομεν ὅλα ταῦτα τὰ ἔξοδα. Ἀφαιροῦντες ἐκ τούτων ὅσα εἰσέπραξεν ἔχομεν τὸ κέρδος.

ΣΥΝΘΕΤΟΣ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ

241. Διὰ τῆς *συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν* λύονται προβλήματα, ἐν οἷς δίδονται αἱ ἀντιστοιχοῦσαι τιμαὶ πολλῶν ποσῶν, καὶ εὑρίσκεται πόση γίνεται ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς τούτων, ὅταν αἱ ἀντιστοιχοῦσαι τιμαὶ τῶν ἄλλων μεταβληθῶσι καὶ λάβωσιν ἄλλας ὡρισμένας τιμάς.

Τὸ ποσόν, τοῦ ὁποίου ἡ τιμὴ ζητεῖται, εἶναι ἀνάλογον ἢ ἀντίστροφον χωριστὰ πρὸς ἕκαστον τῶν ἄλλων.

Ἡ μέθοδος αὕτη λέγεται *σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν*, διότι τὰ δι' αὐτῆς λυόμενα προβλήματα ἀναλύονται ἕκαστον εἰς πολλὰ ἄλλα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν, ὡς φαίνεται κατωτέρω.

Πρόβλημα. 7 ἐργάται ἐργαζόμενοι 12 ὥρας τὴν ἡμέραν ἔσκαψαν ἄμπελον εἰς 15 ἡμέρας· ἐὰν 10 ἐργάται ἐργάζωνται 9 ὥρας καθ' ἑκάστην, εἰς πόσας ἡμέρας θὰ σκάψωσι τὴν αὐτὴν ἄμπελον;

Ἐνταῦθα δίδονται τρία ποσά, ἐργάται, ὧραι καὶ ἡμέραι, καὶ αἱ τιμαὶ αὐτῶν 7 ἐργ. 12 ὡρ. 15 ἡμ., ζητεῖται δὲ πόσος θὰ γίνῃ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν καὶ τῶν ὡρῶν γίνωσι 10 ἐργ. 9 ὧρ.

Οἱ ἐργάται καὶ αἱ ἡμέραι εἶναι ποσὰ ἀντίστροφα, διότι διπλάσιοι ἐργάται τελειώνουν τὸ ἔργον εἰς τὸ ἥμισυ τῶν ἡμερῶν καὶ τριπλάσιοι εἰς τὸ τρίτον· ὁμοίως αἱ ὧραι καὶ αἱ ἡμέραι εἶναι ποσὰ ἀντίστροφα· διότι, ὅταν ἐργάζωνται ἀντὶ 12 ὡρῶν μόνον 6 ὥρας, τὸ ἔργον θὰ ἐξακολουθήσῃ 30 ἡμέρας, καὶ ἂν αἱ ὧραι διαιρεθῶσι διὰ 3, αἱ ἡμέραι θὰ πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ 3.

Τὰ δεδομένα διατάσσονται ὡς ἑξῆς:

$$\frac{7 \text{ ἐργ.}}{10} \qquad \frac{12 \text{ ὧρ.}}{9} \qquad \frac{15 \text{ ἡμ.}}{\chi}$$

Λύσις.

Ἐὰν 7 ἐργ. ἀνὰ 12 ὧρ. τὴν ἡμ. τελειώνουν τὸ ἔργον εἰς 15 ἡμ.,

1 ἐργ. ἀνὰ 12 ὧρ. τὴν ἡμ. τελειώνει τὸ ἔργον εἰς 15×7

καὶ οἱ 10 ἐργ. ἀνὰ 12 ὧρ. τὴν ἡμ. τελειώνουν τὸ ἔργον εἰς $\frac{15 \times 7}{10}$ ἡμ.

οἱ 10 ἐργ. ἀνὰ 1 ὥρ. τὴν ἡμ. τελειώνουν τὸ ἔργον εἰς $\frac{15\times7\times12}{10}$
καὶ οἱ 10 ἐργ. ἀνὰ 9 ὥρ. τὴν ἡμ. τελειώνουν τὸ ἔργον εἰς $\frac{15\times7\times12}{10\times9}$

ὥστε θὰ ἔχωμεν $\chi=\frac{15\times7\times12}{10\times9}=14$.

Παρατήρησις. Τὸ πρόβλημα τοῦτο ἀνελύθη εἰς δύο προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν ὡς ἑξῆς:

α) 7 ἐργ. τελειώνουν τὸ ἔργον εἰς 15 ἡμ. (12 ὥρ. ἐργαζόμενοι)
10 ἐργ. θὰ τὸ τελειώσουν εἰς χ· ὅθεν $\chi=15\times\frac{7}{10}$

β) οἱ 10 ἐργ. ἐργαζόμ. 12 ὥρ. τελειώνουν τὸ ἔργον εἰς $15\times\frac{7}{10}$ ἡμ.
» » » » 9 ὥρ. θὰ τὸ τελειώσουν εἰς χ

ὅθεν $\chi=15\times\frac{7}{10}\times\frac{12}{9}$

Πρόβλ. 50 ἐργ. ἐργαζόμενοι 9 ὥρ. καθ' ἑκάστην εἰς 20 ἡμ. κτίζουσι τοῖχον, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος εἶναι 140 μέτρ. καὶ τὸ ὕψος 3,5 μέτρ. Εἰς πόσας ἡμέρας 28 ἐργ. ἐργαζόμενοι 12 ὥρ. καθ' ἑκάστην θὰ κτίσωσι τοῖχον, τοῦ ὁποίου τὸ μὲν μῆκος εἶναι 75 μέτρα, τὸ δὲ ὕψος 8 μέτρ.;

Διάταξις. $\frac{50}{28}$ ἐργ. $\frac{9}{12}$ ὥρ. $\frac{20}{\chi}$ ἡμ. $\frac{140}{75}$ μῆκ. $\frac{3,5}{8}$ ὕψ.

Παρατήρησις. Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο οἱ ἐργάται καὶ αἱ ἡμέραι εἶναι ποσὰ ἀντίστροφα, αἱ ὧραι καὶ αἱ ἡμέραι ὁμοίως ἀντίστροφα, τὸ μῆκος καὶ αἱ ἡμέραι εἶναι ἀνάλογα, τέλος τὸ ὕψος καὶ αἱ ἡμέραι ἀνάλογα.

Λύσις. Οἱ 50 ἐργ. ὑπὸ τοὺς δεδομένους ὅρους (9 ὥρ. 140 μῆκ. 3,5 ὕψ.) τελειώνουν τὸ ἔργον εἰς 20 ἡμ., ὁ 1 ἐργ. θὰ τὸ τελειώσῃ εἰς 20×50 ἡμ. καὶ οἱ 28 ἐργ. εἰς $\frac{20\times50}{28}$ ἡμ.

Ἐπειδὴ οἱ 28 ἐργ., ἐργαζόμενοι 9 ὥρ. καθ' ἑκάστην, τελειώνουν τὸ ἔργον (140 μῆκ. 3,5 ὕψ.) εἰς $\frac{20\times50}{28}$ ἡμ. ἂν ἤθελον ἐργασθῇ μίαν ὥραν καθ' ἑκάστην, θὰ ἐτελείωνον τὸ ἔργον εἰς $\frac{20\times50\times9}{28}$ ἡμ. καὶ ἂν ἤθελον ἐργασθῇ 12 ὥρ. καθ' ἑκάστην, θὰ τὸ ἐτελείωνον εἰς $\frac{20\times50\times9}{28\times12}$ ἡμ.

Ἐπειδὴ οἱ 28 ἐργ. 12 ὥρ. ἐργαζόμενοι τελειώνουν 140 μέτρα μῆκ. εἰς $\frac{28\times50\times9}{28\times9}$ ἡμ. 1 μέτρ., μῆκ. (ὕψος 3,5) τὸ τελειώνουν εἰς $\frac{20\times50\times9}{28\times12\times140}$ καὶ 75 μέτρ. μῆκ. (ὕψος 3,5) θὰ τὸ τελειώσωσιν εἰς $\frac{20\times50\times9\times75}{28\times12\times140}$ ἡμέρας.

Τέλος ἐπειδὴ οἱ 28 ἐργ. 12 ὥρ. ἐργαζόμενοι τελειώνουν 140 μέτρα μῆκος, ὅταν τὸ ὕψος εἶναι 3,5 εἰς $\frac{20\times50\times9\times75}{28\times12\times140}$, ἂν τὸ ὕψος γίνῃ 1, θὰ ἐργασθοῦν $\frac{20\times50\times9\times75}{28\times12\times140\times3{,}5}$ ἡμ. καὶ ἂν τὸ ὕψος γίνῃ 8, θὰ ἐργασθοῦν ὀκτὼ φορὰς περισσότερον, ἤτοι $\chi=\frac{20\times50\times9\times75\times8}{28\times12\times140\times3{,}5}=32$ ἡμ. 9 ὥρ. περίπου.

242. Ἐκ τῆς λύσεως τῶν δύο προηγουμένων προβλημάτων συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα:

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀγνώστου γράφομεν εἰς ἕνα στίχον ὅλας τὰς γνωστὰς καὶ ἀντιστοιχούσας τιμὰς τῶν δεδομένων ποσῶν καὶ εἰς δεύτερον τὴν ζητουμένην χ καὶ τὰς εἰς ταύτην ἀντιστοιχούσας γνωστὰς τιμὰς τῶν ἄλλων ποσῶν, προσέχοντες ὅπως αἱ δύο τιμαὶ ἑκάστου ποσοῦ εὑρίσκωνται ἡ μὲν κάτωθι τῆς δὲ καὶ προέρχωνται ἐκ τῆς αὐτῆς μονάδος, κατόπιν σύρομεν μεταξὺ τῶν δύο τιμῶν ἑκάστου ποσοῦ εὐθεῖαν.

Τότε ὁ ἄγνωστος χ ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ὑπεράνω αὐτοῦ γνωστοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ τὰ κλάσματα, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἀποτελοῦσιν αἱ δύο τιμαὶ ἑκάστου ποσοῦ, ἂν τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα πρὸς τὸ ποσόν, τοῦ ὁποίου τὴν τιμὴν ζητοῦμεν, ἐπὶ τὰ κλάσματα δὲ ταῦτα ἀντεστραμμένα, ἂν εἶναι ἀνάλογα.

Παρατήρησις. Τὰς πράξεις πρέπει νὰ ἐκτελῶμεν, ἀφοῦ πρῶτον ἐκτελέσωμεν ὅλας τὰς δυνατὰς ἁπλοποιήσεις.

Προβλήματα.

1) Ἐπιχειρηματίας ὑπολογίζει ὅτι, διὰ νὰ κτίσῃ οἰκίαν τινὰ εἰς 60 ἡμέρας, πρέπει νὰ μεταχειρισθῇ 20 ἐργάτας, οἱ ὁποῖοι νὰ ἐργάζωνται 10 ὥρας τὴν ἡμέραν. Ἐὰν ὁ αὐτὸς θέλῃ νὰ κτίσῃ τὴν οἰκίαν 20 ἡμέρας ταχύτερον, πόσους ἐργάτας, ἐργαζομένους 2 ὥρας περισσότερον καθ' ἑκάστην, πρέπει νὰ προσλάβῃ; **Ἀπ. 25.**

2) Διὰ νὰ ἐπιστρώσωμεν αἴθουσαν 42 τετραγων. μέτρ. μετεχειρίσθημεν 100 σανίδας πλάτους 0,21 μέτρου καὶ μήκους 2 μέτρων. Ἐὰν πρόκηται νὰ στρώσωμεν αἴθουσαν, ἥτις εἶναι τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς προηγουμένης, καὶ μεταχειρισθῶμεν σανίδας πλάτους 0,10 καὶ μήκους 1,60, πόσας σανίδας θὰ χρειασθῶμεν; Ἀπ. 175.

Σημ. Τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος τῶν σανίδων εἶναι ἀντίστροφα τοῦ ἀριθμοῦ αὐτῶν.

3) Ταχυδρόμος βαδίζων 9 ὥρας καθ' ἑκάστην διατρέχει εἰς 3 ἡμέρας 172 χιλιόμετρα. Μετὰ πόσας ἡμέρας ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεώς του ἀπό τινος πόλεως θὰ φθάσῃ εἰς ἄλλην ἀπέχουσαν 560 βέρστια, ἐὰν βαδίζῃ 7 ὥρας τὴν ἡμέραν μὲ τὸ αὐτὸ βῆμα; Ἀπ. τὴν 14 ἡμέραν.

Σημ. Πρέπει πρῶτον νὰ τρέψωμεν τὰ βέρστια εἰς μέτρα.

4) Πρὸς μεταφορὰν 300 χγ. εἰς ἀπόστασιν 370 χιλιομέτρων ἐπληρώσαμεν 120 γρόσ. Πόσα φράγκα θὰ πληρώσωμεν πρὸς μεταφορὰν 500 ὀκάδων εἰς ἀπόστασιν 275 χμ; Ἀπ. 40,06 φρ.

5) Μαγειρεῖον σχήματος ὀρθογωνίου ἔχει μῆκος 5 μέτρα καὶ πλάτος 6, ἐπιστρώνεται δὲ διὰ 750 πλακῶν, ἑκάστης τῶν ὁποίων τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 0,04 τετρ. μέτρ. Ἐὰν τὸ μῆκος τοῦ μαγειρείου γίνῃ 3 μέτρ., τὸ δὲ πλάτος 3,5, διὰ πόσων πλακῶν θὰ ἐπιστρωθῇ, ἐὰν ἑκάστη ἔχῃ ἐμβαδὸν 0,05 τετρ. μέτρων; Ἀπ. 210.

6) 130 ἄνθρωποι ἐργαζόμενοι 12 ὥρας καθ' ἑκάστην ἐτελείωσαν εἰς 52 ἡμέρας διώρυχα μήκους 2000 μέτρ., πλάτους 10 μέτρ. καὶ βάθους 5. Εἰς πόσας ἡμέρας 650 ἄνθρωποι ἐργαζόμενοι 10 ὥρας τὴν ἡμέραν θὰ κατασκευάσωσι διώρυχα μήκους 3500 μέτρ., πλάτους 8 μέτρ. καὶ βάθους 3, ἡ δὲ σκληρότης τοῦ ἐδάφους νὰ εἶναι τριπλασία τῆς τοῦ ἄλλου;
Ἀπ. 31 ἡμ. 4 ὥρας περίπου.

Σημ. Ἐὰν τὴν σκληρότητα τοῦ πρώτου ἐδάφους παραστήσωμεν διὰ τοῦ 1, ἡ σκληρότης τοῦ δευτέρου θὰ παρασταθῇ διὰ τοῦ 3.

7) Δύο συνέταιροι ἔκαμον ἐπιχείρησίν τινα, καὶ ὁ μὲν πρῶτος, ὅστις κατέθεσε 2500 γρόσ., εἰς 8 μῆνας ἔλαβε κέρδος 1200 γρόσ., ὁ δὲ δεύτερος, ὅστις κατέθεσε 4000, ζητεῖται τί κέρδος θὰ λάβῃ εἰς 6 μῆνας; Ἀπ. 1440 γρ.

8) Διὰ νὰ καλύψωμεν τοὺς τοίχους δωματίου τινὸς χρειαζόμεθα 15 κυλίνδρους χάρτου πλάτους 45 δακτύλων καὶ μήκους 10 μέτρων. Πόσους κυλίνδρους χρειαζόμεθα, ἐὰν τὸ πλάτος τοῦ χάρτου εἶναι 50 δακτύλων, τὸ δὲ μῆκος 7 μέτρων; Ἀπ. 19,29 κυλίνδρ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΤΟΚΟΥ

243. *Τόκος* λέγεται τὸ κέρδος, τὸ ὁποῖον λαμβάνει τις, ὅταν δανείζῃ χρήματα ἢ καταθέτῃ ταῦτα εἰς τράπεζάν τινα.

Κεφάλαιον λέγεται τὰ χρήματα, τὰ ὁποῖα δανείζει.

Ἐπιτόκιον λέγεται τὸ κέρδος, τὸ ὁποῖον ὁ δανείζων λαμβάνει ἀπὸ τὰς 100 μονάδας εἰς ἓν ἔτος, ἤτοι ὁ *τόκος* τῶν 100 μονάδων εἰς ἓν ἔτος.

Ἁπλοῦς τόκος λέγεται ὁ τόκος, ὅταν τὸ κεφάλαιον μένῃ πάντοτε τὸ αὐτό.

Σύνθετος λέγεται ὁ τόκος, ὅταν ὁ τόκος ἑνὸς ἔτους προστίθηται εἰς τὸ κεφάλαιον καὶ μετὰ τούτου τοκίζηται καὶ αὐτός.

Παρατήρησις. Ἰδιαίτεραι συμφωνίαι ὁρίζουσι τὸ ἐπιτόκιον οὐχὶ ἐπὶ τοῖς $^0/_0$ καὶ εἰς ἓν ἔτος, ἀλλ' ἐπὶ ἄλλῳ τινὶ ποσῷ καὶ εἰς ἄλλο χρονικὸν διάστημα, οἷον ἐπὶ τοῖς 10 καὶ εἰς ἕνα μῆνα ἢ εἰς μίαν ἡμέραν, ἀλλὰ ταῦτα δὲν ἀναγνωρίζονται ὑπὸ τοῦ νόμου.

Τὰ προβλήματα τοῦ τόκου λύονται, ὅπως ὅλα τὰ προβλήματα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν.

Ἄγνωστος ὁ τόκος.

244. *Πρόβλ.* Πόσον τόκον φέρουν 1 560 γρόσ. εἰς 3 ἔτη τοκιζόμενα πρὸς 5$^0/_0$;

Διάταξις. $\overset{\text{κεφ.}}{\frac{100}{1560}}$ γρόσ. $\overset{\text{χρ.}}{\frac{1}{3}}$ ἔτος $\overset{\text{τόκ.}}{\frac{5}{x}}$ γρόσ.

Παρατήρησις. Ἐνταῦθα, καθὼς καὶ εἰς πᾶν πρόβλημα τόκου, εἰσέρχονται τρία ποσά, τὸ κεφάλαιον, ὁ χρόνος καὶ ὁ τόκος. Παρατηροῦμεν δέ, ὅτι εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον διπλάσιον κεφάλαιον φέρει διπλάσιον τόκον, καὶ τριπλάσιον κεφάλαιον φέρει τριπλάσιον τόκον. Ἑπομένως τὸ *κεφάλαιον καὶ ὁ τόκος εἶναι ποσὰ ἀνάλογα*.

Ἐπίσης παρατηροῦμεν, ὅτι ἀπὸ τὸ αὐτὸ κεφάλαιον εἰς διπλάσιον χρόνον λαμβάνει τις διπλάσιον τόκον, καὶ εἰς τριπλάσιον χρόνον λαμβάνει τριπλάσιον τόκον· *ἄρα ὁ χρόνος καὶ ὁ τόκος εἶναι ποσὰ ἀνάλογα.*

Λύσις διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα.

Ἐπειδὴ	100 γρόσ.	εἰς	1 ἔτος	φέρουσι	5 γρόσ. τόκον,		
τὸ	1 »	»	1 »	θὰ φέρῃ	$\frac{5}{100}$	»	»
τὰ δὲ	1560 »	»	1 »	θὰ φέρωσι	$\frac{5\times1560}{100}$	»	»
καὶ τὰ	1560 »	»	3 »	»	$\frac{5\times1560\times3}{100}$	»	»

Λύσις διὰ τοῦ κανόνος (242).

$$\chi = 5 \times \frac{1560}{100} \times \frac{3}{1} = 234 \text{ γρόσ.}$$

Παρατήρησις. Εἰς τὰ προβλήματα τοῦ τόκου, ὅπως καὶ εἰς ὅλα τὰ προβλήματα τὰ λυόμενα διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα, αἱ δύο τιμαὶ ἑκάστου ποσοῦ πρέπει νὰ προέρχωνται ἐκ τῆς αὐτῆς συγκεκριμένης μονάδος. Οὕτως οἱ δύο ἀριθμοὶ οἱ ἐκφράζοντες χρόνον πρέπει νὰ προέρχωνται ἐκ τῆς αὐτῆς χρονικῆς μονάδος, δηλ. πρέπει νὰ παριστῶσι καὶ οἱ δύο ἢ ἔτη ἢ μῆνας ἢ ἡμέρας· πρὸς ἐπιτυχίαν δὲ τούτου, ἂν δὲν συμβαίνῃ, ἐκτελοῦμεν τὰς ἀναγκαίας μετατροπάς.

245. *Πρόβλ.* Πόσον τόκον φέρουν 830 γρόσ. εἰς 6 ἔτη καὶ 4 μῆνας πρὸς 9 %;

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο τρέπομεν τὰ 6 ἔτη καὶ 4 μῆν. εἰς 76 μῆν. καὶ τὸ 1 ἔτος εἰς 12 μῆν. καὶ οὕτως ἔχομεν τὴν ἑξῆς κατάταξιν:

κεφ.	*χρ.*	*τόκ.*
100 γρόσ.	12 μῆν.	9 γρόσ.
830 »	76 »	χ

Λύσις διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα.

Ἐπειδὴ τὰ	100 γρόσ.	εἰς	12 μῆν.	φέρουν τόκον		9 γρόσ.	
τὸ	1 »	»	12 »	θὰ φέρῃ	»	$\frac{9}{100}$	»
καὶ τὰ	830 »	»	12 »	θὰ φέρωσι	»	$\frac{9\times830}{100}$	
τὰ δὲ	830 »	»	1 »	»	»	$\frac{9\times830}{12\times100}$	
καὶ τέλος τά	830 »	»	76 »	»	»	$\frac{9\times830\times76}{100\times12} = 473,10$	

246. Ἐκ τῆς λύσεως τῶν δύο τούτων προβλημάτων συνάγομεν, ὅτι *Πρὸς εὕρεσιν τοῦ τόκου πολλαπλασιάζομεν τὸ ἐπιτόκιον ἐπὶ τὸ κεφάλαιον καὶ ἐπὶ τὸν χρόνον καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ 100. Ἂν ὁ χρόνος δίδεται εἰς μῆνας, τὸν οὕτως εὑρισκόμενον ἀριθμὸν διαιροῦμεν διὰ 12, ἂν δὲ ὁ χρόνος δίδεται εἰς ἡμέρας, διαιροῦμεν διὰ 360.*

Ἄγνωστον τὸ κεφάλαιον.

247. *Πρόβλημα.* Πόσον κεφάλαιον εἰς 6 ἔτη πρὸς 8% φέρει τόκον 840 γρόσ.;

Πρὸς διάταξιν καὶ λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς. Διὰ νὰ λάβωμεν τόκον 8 γρόσ. εἰς 1 ἔτος, δανείζομεν 100 γρόσ., διὰ νὰ λάβωμεν δὲ τόκον 840 γρόσ. εἰς 6 ἔτη, πόσα πρέπει νὰ δανείσωμεν;

Παρατήρησις. Διὰ νὰ λάβωμεν 8 εἰς 1 ἔτος, δανείζομεν 100, διὰ νὰ λάβωμεν πάλιν 8 εἰς 2 ὅμως ἔτη, πρέπει νὰ δανείσωμεν μόνον 50, καὶ διὰ νὰ λάβωμεν 8 εἰς 4 ἔτη, πρέπει νὰ δανείσωμεν μόνον 25· ὥστε, ὅταν ὁ χρόνος πολλαπλασιάζηται, τὸ κεφάλαιον διαιρεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ· διὰ τοῦτο *ὁ χρόνος καὶ τὸ κεφάλαιον εἶναι ποσὰ ἀντίστροφα.*

	τόκ.	χρόν.	κεφάλ.
Διάταξις.	8 γρόσ.	1 ἔτ.	100
	840	6	χ

Λύσις διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα.

Διὰ νὰ λάβω τόκον 8 γρόσ.	εἰς 1 ἔτος	δανείζω	100 γρόσ.	
» » » 1 »	» 1 »	θὰ δανείσω	$\frac{100}{8}$	
» » » 840 »	» 1 »	»	$\frac{100\times 840}{8}$	»
» » » 840 »	» 6 ἔτη	»	$\frac{100\times 840}{8\times 6}$	»

ὅθεν $\chi=\frac{100\times 840}{8\times 6}=1750$ γρόσ.

Ἐὰν λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο κατὰ τὸν κανόνα (242) ἐκ τῆς ἀνωτέρω διατάξεως, θὰ ἔχωμεν

$$\chi=100\times\frac{840}{8}\times\frac{1}{6}=1750.$$

248. *Πρόβλ.* Πόσον κεφάλαιον εἰς 84 ἡμέρας πρὸς 12 °/₀ δίδει τόκον 50 γρόσ.;

Διατάσσοντες τὰ δεδομένα:

τόκ.	χρόν.	κεφ.
12 γρόσ.	365 ἡμ.	100 γρόσ.
50 »	84 »	χ »

εὑρίσκομεν $\chi = \frac{100 \times 50 \times 365}{12 \times 84} = 516 = 1810{,}51.$

249. Ἐκ τῆς λύσεως τῶν δύο ἀνωτέρω προβλημάτων συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα:

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ κεφαλαίου πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100 καὶ διαιροῦμεν διὰ τῶν δύο ἄλλων γνωστῶν ποσῶν (χρόνου καὶ ἐπιτοκίου). Ἂν ὁ χρόνος εἶναι μῆνες, τὸν οὕτω εὑρισκόμενον ἀριθμὸν πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 12· ἂν δὲ ἡμέραι, ἐπὶ 365.

Ἄγνωστος ὁ χρόνος.

250. *Πρόβλ.* Εἰς πόσον χρόνον κεφάλαιον 750 γροσ. πρὸς 10 °/₀ δίδει τόκον 120 γρόσια;

Ἐν πρώτοις διατάσσομεν τὰ δεδομένα οὕτως·

κεφ.	χρόν.	τόκ.
100 γρόσ.	1 ἔτος	10 γρόσ.
750 »	χ »	120 »

Λύσις διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα.

Ἐπειδὴ τὰ 100 γρόσ.	δίδουσι τόκον	10	εἰς 1 ἔτος	
τὸ 1 »	θὰ δώσῃ »	10	» 100 ἔτη	
καὶ τὰ 750 »	θὰ δώσουν »	10	» $\frac{100}{750}$	»
τὰ δὲ 750 »	» »	1	» $\frac{100}{750 \times 10}$	»
καὶ τέλος τὰ 750 »	» »	120	» $\frac{100 \times 120}{750 \times 10}$	»

ὥστε θὰ ἔχωμεν $\chi = \frac{100 \times 120}{750 \times 10} = 1$ ἔτος 7 μῆνες 6 ἡμέραι.

Λύσις διὰ τοῦ κανόνος τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν.

Ἐφαρμόζοντες εἰς τὴν ἀνωτέρω διάταξιν τῶν δεδομένων τὸν κανόνα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν εὑρίσκομεν·

$$\chi = \frac{100 \times 120}{750 \times 10} = 1 \text{ ἔτος } 7 \text{ μῆνες } 6 \text{ ἡμέραι.}$$

Ἡ ἰσότης αὕτη εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν προηγουμένην.

251. Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα·
Πρὸς εὕρεσιν τοῦ χρόνου πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων ποσῶν (κεφαλαίου καὶ ἐπιτοκίου).

Ἄγνωστον τὸ ἐπιτόκιον.

252. *Πρόβλ.* Πρὸς πόσα τοῖς 100 κεφάλαιον 1400 γρόσ. εἰς 4 ἔτη δίδει τόκον 336 γρόσια;

	κεφ.	*χρόν.*	*τόκ.*
Διάταξις.	1400 γρόσ.	4 ἔτη	336 γρόσ.
	100 »	1 ἔτος	χ »

Λύσις διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα.

Ἐπειδὴ τὰ 1400 γρόσ. εἰς 4 ἔτη φέρουν τόκ. 336 γρόσ.
τὸ 1 » » 4 » θὰ φέρῃ » $\frac{336}{1400}$
τὰ δὲ 100 » » 4 » θὰ φέρωσι » $\frac{336 \times 100}{1400}$
καὶ τὰ 100 » » 1 ἔτ. » » $\frac{336 \times 100}{1400 \times 4} = 6$ γρόσ.

ὥστε ἔχομεν $\chi = 6\,^0/_0$.

Ἐὰν ἐφαρμόσωμεν εἰς τὴν ἀνωτέρω διάταξιν τῶν δεδομένων τοῦ προβλήματος τὸν κανόνα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν, θέλομεν φθάσῃ εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον.

253. *Πρόβλ.* Πρὸς πόσα τοῖς 100 κεφάλαιον 1800 γρόσ. εἰς 40 ἡμέρας φέρει τόκον 75 γρόσια;

	κεφάλ.	*χρόνος*	*τόκος*
Διάταξις.	1800 γρόσ.	40 ἡμέρ.	75 γρόσ.
	100 »	365 »	χ »

Ἐφαρμόζοντες τὴν μέθοδον τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα ἢ τὸν κανόνα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν εὑρίσκομεν:

$$\chi = \frac{75 \times 100 \times 365}{1800 \times 40} = 38,02.$$

254. Ἐκ τῆς λύσεως τῶν δύο ἀνωτέρω προβλημάτων συνάγομεν, ὅτι

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐπιτοκίου πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τῶν δύο ἄλλων γνωστῶν ποσῶν (κεφαλαίου καὶ χρόνου).

Ἂν ὅμως ὁ χρόνος εἶναι μῆνες, τότε τὸν οὕτως εὑρισκόμενον ἀριθμὸν πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 12, ἐὰν δὲ ἡμέραι, πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 365.

Γενικὸς κανών.

255. Οἱ τέσσαρες κανόνες τῶν προβλημάνων τοῦ τόκου περιλαμβάνονται εἰς ἕνα τὸν ἑξῆς:

Ὁ τόκος εὑρίσκεται, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὰς γνωστὰς τιμὰς καὶ τὸ γινόμενον διαιρέσωμεν διὰ τοῦ 100, ἢ διὰ τοῦ 100×12, ἂν ὁ χρόνος εἶναι μῆνες, ἢ διὰ 100×360, ἂν εἶναι ἡμέραι. Ὅταν δὲ ζητῆται ἡ τιμὴ ἄλλης τινὸς ποσότητος, πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν γνωστῶν τιμῶν τῶν δύο ἄλλων ποσοτήτων προσέχοντες, ὅταν ὁ χρόνος δίδηται εἰς μῆνας, νὰ πολλαπλασιάζωμεν τὸν οὕτως εὑρισκομεν ἀριθμὸν ἐπὶ 12, ἂν δὲ εἰς ἡμέρας, ἐπὶ 365.

Εἰς τὸ ἐμπόριον τὸ ἔτος συνήθως λαμβάνεται μὲ 360 ἡμέρας. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἐπιδέχεται πολλὰς ἁπλοποιήσεις. Ἐκ τῶν ἁπλοποιήσεων τούτων καὶ τινων ἄλλων μεταβολῶν τῶν πράξεων προκύπτουσι διάφοροι μέθοδοι, αἵτινες εὐκολύνουσι τὴν εὕρεσιν τοῦ τόκου. Ἐκ τούτων ἀναφέρομέν τινας.

Ὁρισμός.

Τοκάριθμος λέγεται τὸ γινόμενον τοῦ κεφαλαίου ἐπὶ τὰς ἡμέρας, καθ' ἃς τοκίζεται.

Εὕρεσις τοῦ τόκου διὰ τῆς μεθόδου τῶν σταθερῶν διαιρετῶν.

(Ἔτος 360 ἡμέραι).

256. *Πρόβλ.* Πόσον τόκον φέρουσι 370 γρόσ. πρὸς 5% εἰς 85 ἡμ.;

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω, ὁ ζητούμενος τόκος θὰ εἶναι·

$$\chi = \frac{370 \times 85 \times 5}{100 \times 360} = \frac{370 \times 85}{\left(\frac{36000}{5}\right)} = 4,36.$$

Τὸ γινόμενον 370×85 εἶναι ὁ τοκάριθμος, τὸ δὲ **κλάσμα** $\frac{36000}{5}$, ἤτοι 7200, ὁ σταθερὸς διαιρέτης τοῦ τοκαρίθμου, ὅταν ἐπιτόκιον εἶναι 5.

Πάντοτε, *ὅταν τὸ ἐπιτόκιον εἶναι* 5, *πρέπει πρὸς εὕρεσιν τοῦ τόκου νὰ διαιρῶμεν τὸν τοκάριθμον διὰ τοῦ πηλίκου* $\frac{36000}{5} = 7\,200$.

Ἂν τὸ ἐπιτόκιον εἶναι

$$2 \quad 3 \quad 4 \quad 4^{1}/_{2} \quad 5 \quad 6 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 12,$$

εὑρίσκομεν, ὅτι οἱ ἀντιστοιχοῦντες *διαιρέται* εἶναι *σταθεροί*

	$\frac{36000}{2}$	$\frac{36000}{3}$	$\frac{36000}{4}$	$\frac{36000}{4,5}$	$\frac{36000}{5}$	$\frac{36000}{6}$	$\frac{36000}{8}$	$\frac{36000}{9}$	$\frac{36000}{12}$	$\frac{36000}{12}$
δηλ.	18000	12000	9000	8000	7200	6000	4500	4000	3600	3000

Ἑπομένως οἱ τόκοι τῶν 370 γροσ. εἰς 85 ἡμέρας μὲ τὰ ἀνωτέρω ἐπιτόκια κατὰ σειρὰν εἶναι

$\frac{3145}{18000}$ ὁ πρὸς 2 %, $\frac{3145}{12000}$ ὁ πρὸς 3 %, $\frac{3145}{9000}$ ὁ πρὸς 4 % **κτλ.** $\frac{3145}{3000}$ ὁ πρὸς 12 %.

Καὶ ἐὰν χωρίζωμεν δύο ψηφία ὡς δεκαδικὰ δεξιὰ τοῦ τοκαρίθμου. θὰ ἔχωμεν

δι' ἐπιτόκια	2	3	4	$4^{1}/_{2}$	5	6	8	9	10	**12**
σταθεροὺς διαιρέτας	180	120	90	80	72	60	45	40	36	**30**

Ὁ σταθερὸς διαιρετης εἰς ἕκαστον πρόβλημα εὑρίσκεται εὐκόλως, ἂν διαιρεθῇ ὁ 3600 διὰ τοῦ ἐπιτοκίου.

257. Ἐξ ὅλων τούτων συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα:

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ τόκου διαιροῦμεν τὸν τοκάριθμον διὰ τοῦ σταθεροῦ διαιρέτου τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὸ ἐπιτόκιον.

Μέθοδος τῶν σταθερῶν πολλαπλασιαστῶν.

258. *Πρόβλ.* Πόσον τόκον φέρουσι 1 250 γρόσ. πρὸς 6 % εἰς 78 ἡμέρας ;

Κατὰ τὰ γνωστὰ θὰ ἔχωμεν

$$\chi = \frac{1250 \times 78 \times 6}{100 \times 360} \text{ καὶ } \chi = 1250 \times 78 \times \frac{6}{36000} = 16,207.$$

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο τοκάριθμος εἶναι 1250×78, σταθερὸς δὲ πολλαπλασιαστὴς $\frac{6}{36000}$, ἤτοι ὁ 0,0001667· ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι εἰς ἐπιτόκιον 3, 4, $4^1/_2$, 5 κτλ. ἀντιστοιχοῦσι σταθεροὶ πολλαπλασιασταί οἱ ἑξῆς: 0,0000833-0,000111-0,000125-0,0001389.

Παρατήρησις α΄. Ὑπάρχουσι πίνακες, οἵτινες εἰς ἕκαστον σταθερὸν διαιρέτην ἢ πολλαπλασιαστὴν ἔχουσιν ὅλους τοὺς ἀντιστοιχοῦντας τοκαρίθμους ἀπὸ 1 ἡμέρας καὶ ἄνω μέχρι τινός. Διὰ τῶν πινάκων τούτων οἱ ἔμποροι λύουσιν εὐκόλως πᾶν σχετικὸν πρόβλημα.

Παρατήρησις β΄. Ὑπάρχουσι καὶ ἄλλαι μέθοδοι πρὸς εὕρεσιν τοῦ τόκου, ἀλλ' ἕνεκα τῆς περιωρισμένης αὐτῶν χρήσεως παραλείπομεν αὐτάς.

Προβλήματα.

Σημ. Εἰς τὰ κατωτέρω προβλήματα λαμβάνομεν τὸ ἔτος μὲ 365 ἡμέρας.

1) Πόσον τόκον φέρουν 950 γρόσ. πρὸς 6,5 % εἰς 4 ἔτη; 'Απ. 247.

2) Πόσον τόκον φέρουν 780 γρόσ. εἰς 4 ἔτη 7 μῆνας πρὸς 8,5 %; 'Απ. 303,87 γρόσ.

3) Πόσον κεφάλαιον εἰς 7 ἔτη πρὸς 12 % δίδει τόκον 790 γρόσια; 'Απ. 940,47 γρόσ.

4) Πόσων λιρῶν κεφάλαιον εἰς 125 ἡμέρας πρὸς 4,5 % δίδει τόκον 7 λίρας; 'Απ. 454,22... λίρ.

5) Εἰς πόσον χρόνον κεφάλαιον 500 γροσ. τοκιζόμενον πρὸς 6 % γίνεται 536; 'Απ. 1 ἔτος 2 μῆν. 12 ἡμ.

6) Κύριός τις ἐζήτει δάνειον 800 γροσ. διὰ 2 ἔτη πρὸς 4,5 %, ὁ δὲ δανειστὴς ἠρνήθη· μετὰ 5 ὅμως μῆνας ἐτόκισε 800 γρόσ. μέχρι τοῦ ὑπολοίπου χρόνου πρὸς 5,5 %. 'Επέτυχεν ἆρά γε ὁ δανειστὴς μεγαλείτερον κέρδος τοῦ προτέρου καὶ πόσον; 'Απ. 'Εζημιώθη 2,34... γρόσ.

7) Γεωργὸς ἠγόρασεν ἀντὶ 350 λιρ. τουρκ. ἀγρόν, ὅστις φέρει εἰσόδημα κατ' ἔτος 2446 ἀργ. γρόσ. Ἠδύνατο ὅμως νὰ τοκίσῃ τὰς 350 λίρ. πρὸς 5 %. Θὰ κερδίζῃ ἆρά γε περισσότερα καὶ πόσον;

'Απ. 'Απὸ τὸν ἀγρὸν κερδίζει 556 ἀργ. γρόσ. περισσότερα, αἱ δὲ 350 λίραι τοκίζονται πρὸς 6,47 %.

8) Οἰκία τις ἠγοράσθη ἀντὶ 1500 λιρ. καὶ ἐνοικιάζεται 90 λίρ. κατ' ἔτος, πληρώνουσι δὲ διὰ διαφόρους ἐπισκευάς, φόρους κτλ. 15 λίρ. κατ' ἔτος· Πόσον τοῖς ἑκατὸν φέρει εἰσόδημα; 'Απ. 5 %.

9) Ἔμπορός τις ἠγόρασεν ἀριθμόν τινα βαρελίων πλήρων οἴνου ἀντὶ 6 λιρ. τουρκ. ἕκαστον· τρία δὲ ἔτη μετὰ ταῦτα μετεπώλησεν ἕκαστον ἀντὶ 7,82 λιρ. Πόσον τοῖς ἑκατὸν ὠφελήθη; 'Απ. 10 %.

10) Ἐδανείσθη τις 48000 γρόσ. διὰ 2 ἔτη πρὸς 8 % μὲ τὴν συμφωνίαν νὰ πληρώσῃ τὸ ποσὸν τοῦτο εἰς ἴσας μηνιαίας δόσεις καὶ εἰς τὸ τέλος ἑκάστου μηνός, μετὰ τῆς τελευταίας δὲ δόσεως θὰ πληρώσῃ καὶ τοὺς τόκους ὅλων τῶν χρημάτων. Πόση εἶναι ἡ τελευταία δόσις;

Λύσις. Ἑκάστη δόσις εἶναι 2000· ὥστε ἡ πρώτη δόσις ἅμα τῇ λήξει τοῦ πρώτου μηνὸς θὰ δώσῃ τόκον πρὸς 8 % ἑνὸς μηνός, ἡ δὲ δευτέρα θὰ δώσῃ τόκον δύο μηνῶν καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς· ἡ τελευταία θὰ δώσῃ τόκον 24 μηνῶν. Ὁ δανεισθεὶς λοιπὸν θὰ πληρώσῃ τοὺς τόκους, τοὺς ὁποίους τὰ 2000 γρόσια δίδουν εἰς $(1+2+3+4+\ldots+24)$ μῆνας, ἤτοι 300 μῆνας καὶ τὴν τελευταίαν δόσιν, ἤτοι τὸ ὅλον 6000 γρόσια.

Σημ. Τὸ ἄθροισμα $1+2+3+\ldots+23+24$ εὑρίσκεται εὐκόλως ὡς ἑξῆς:

γράφομεν αὐτὸ οὕτω	$1+\ 2+\ 3+\ 4+\ldots+23+24$
γράφομεν καὶ ἀντιστρόφως	$24+23+22+21+\ldots+2+\ 1$
καὶ προσθέτομεν	$25+25+25+25+\ldots\ 25+25$

τοῦτο εἶναι διπλάσιον τοῦ δοθέντος καὶ περιέχει 24 φορὰς τὸν ἀριθμὸν 25, ὅθεν γράφεται 25×24, ὥστε τὸ δοθὲν θὰ εἶναι $\frac{25\times 24}{2}=300$.

11) Αἱ λαχειοφόροι ὁμολογίαι τῶν Ἀνατολικῶν σιδηροδρόμων ἀξίζουν 5 λίρας ἑκάστη, κληρώνονται δὲ ἑξάκις τοῦ ἔτους καὶ οἱ ἐπιτυγχάνοντες ἀριθμοὶ κερδίζουν ἕκαστος ποσόν τι. Ἐὰν ὁ ἔχων μετοχὴν πωλῇ τὸν ἀριθμὸν αὐτῆς εἰς ἑκάστην κλήρωσιν ἀντὶ 7,5 γροσ. καὶ μεταβιβάζῃ οὕτω τὸ δικαίωμα τῆς ἐπιτυχίας εἰς ἄλλον, πόσον τοῖς ἑκατὸν κερδίζει ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς μετοχῆς; 'Απ. 8,32 %.

12) Ἐδάνεισέ τις χρήματα πρὸς 8 %, τρία δὲ ἔτη μετὰ ταῦτα ἔλαβε κεφάλαιον καὶ τόκους 5840 φράγκα. Πόσον εἶναι τὸ κεφάλαιον καὶ πόσοι οἱ τόκοι;

Λύσις. Λαμβάνομεν βοηθητικόν τι κεφάλαιον 100 φρ. Ταῦτα εἰς 3 ἔτη θὰ δώσουν τόκον 24 φράγκα, θὰ γίνουν λοιπὸν 124 κεφάλαιον καὶ τόκοι ὁμοῦ. Μετὰ ταῦτα θὰ ἔχωμεν νὰ λύσωμεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα:

Ὅταν κεφάλαιον καὶ τόκοι εἶναι 124, κεφάλαιον μὲν εἶναι 100, τόκοι δὲ 24· ὅταν κεφάλαιον καὶ τόκοι εἶναι 5840, πόσον εἶναι τὸ κεφάλαιον καὶ πόσοι οἱ τόκοι;

'Απ. 4709,68..... φρ. κεφάλαιον καὶ 1130,32... φρ. τόκοι.

Ὁμοίως λύεται καὶ τὸ ἑξῆς πρόβλημα:

13) Ἐδάνεισέ τις χρηματικὸν ποσὸν πρὸς 6 % καὶ μετὰ 10 μῆνας ἔλαβε κεφάλαιον καὶ τόκους 890 φράγκ. Πόσον εἶναι τὸ κεφάλαιον καὶ πόσοι οἱ τόκοι; 'Απ. Τὸ κεφάλαιον εἶναι 847,61... οἱ δὲ τόκοι 42,38...

14) Εἰς πόσον χρόνον κεφάλαιον 7000 γροσ. πρὸς 5 % ἐπὶ ἁπλῷ τόκῳ διπλασιάζεται, δηλ. δίδει τόκον, ὅσον εἶναι τὸ κεφάλαιον; 'Απ. 20 ἔτη.

15) Εἰς πόσον χρόνον κεφάλαιόν τι πρὸς 7 % ἐπὶ ἁπλῷ τόκῳ δίδει τόκον $\frac{2}{3}$ τοῦ κεφαλαίου; 'Απ. 9 ἔτη 6 μῆνας 9 ἡμέρας περίπου.

Ὁδηγία. Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο, καθὼς καὶ εἰς τὸ προηγούμενον, εἶναι ἀδιάφορον πόσον εἶναι τὸ κεφάλαιον. Ἐνταῦθα ὡς κεφάλαιον λαμβάνομεν τὴν μονάδα, δηλ. τὸ ἓν γρόσιον ἢ τὴν μίαν λίραν ἢ τὸ ἓν φράγκον, καὶ εὑρίσκομεν τὸν ζητούμενον χρόνον.

16) Κεφάλαιον 5000 γρόσ. εἰς 3 ἔτη καὶ 8 μῆνας ἔδωκε τόκον τὸ $\frac{2}{7}$ αὐτοῦ· πρὸς πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐτοκίζετο; 'Απ. 7,79 %.

Σημ. Θὰ εὕρωμεν πρῶτον τὰ $\frac{2}{7}$ τοῦ 5600, τὰ ὁποῖα θὰ εἶναι ὁ τόκος κτλ, δυνάμεθα ὅμως νὰ παραλείψωμεν τὸ 5600 καὶ νὰ εἴπωμεν, κεφάλαιον 1 δίδει εἰς 3 ἔτη καὶ 8 μῆνας τόκον $\frac{2}{7}$ κτλ.

17) Ἔχει τις ἰδιοκτησίαν, ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνει 450 λίρας ἐνοίκιον καὶ 150 κοιλὰ σίτου ἀξίας 23 γρόσ. τὸ κοιλόν, 35 ὀκάδες βουτύρου ἀξίας 20 γρόσ. κατ' ὀκ., 50 ὀκ. ἐλαίου ἀξίας 5 γρόσ. κατ' ὀκ. καὶ ἄλλα τινὰ ἐκ τῶν εἰσοδημάτων, τὸ ὅλον ἀξίας 350 φράγκων. Πόσων λιρῶν εἶναι ἡ ἀξία τοῦ κτήματος, ἐὰν ὑποτεθῇ, ὅτι αὕτη ἀποφέρει 12 %;

'Απ. 4217,79 λίρ. τουρκ.

18) Κεφαλαιοῦχος καταθέσας εἰς τράπεζαν 702 λίρας πρὸς 4 % ἀποσύρει ταύτας καὶ τὰς μὲν 300 δίδει πρὸς ἀγορὰν οἰκίας, τὴν ὁποίαν ἐνοικιάζει πρὸς 3 λίρας τὸν μῆνα, δαπανᾷ ὅμως κατ' ἔτος εἰς φόρους, ἐπισκευὰς καὶ ἄλλα ἔξοδα 10 λίρας, τὰς δὲ ἐπιλοίπους τοκίζει πρὸς 4,5 %. Πόσον

τοῖς ἑκατὸν ἀποφέρει τώρα ἡ περιουσία του καὶ πόσον κερδίζει περισσότερον ἢ πρίν; Ἀπ. 6,29 %. Τὸ ὅλον κερδίζει περισσότερα ἢ πρὶν 16 λίρ.

Προσθήκη. Νὰ τραπῶσιν αἱ 16 λίρ. εἰς ρούβλια· Ἀπ. 136,42.

19) Ἐπιστήμων κερδίζει 15 λίρ. κατὰ μῆνα. Πρὸς πόσην περιουσίαν ἀντιστοιχεῖ τὸ κέρδος τοῦτο, ἂν ὑποτεθῇ, ὅτι αὕτη τοκίζεται πρὸς 6 %; Ἀπ. 3000 λίρ.

Προσθήκη. Νὰ τραπῶσιν αἱ 3000 λίρ. εἰς χαρτίνας δραχμάς, ἂν ὑποτεθῇ, ὅτι ἡ τουρκ. λίρα ἔχει 34,50 δραχμάς. Ἀπ. 103500.

20) Ἰδιοκτήτης ἔχει κτῆμα 350 νέων στρεμμάτων μετὰ διαφόρων ἐν αὐτῷ οἰκημάτων, τὸ ὁποῖον ἐνοικιάζει ἀντὶ 300 λίρ. Πωλεῖ ὅμως τὸ μὲν γήπεδον ἀντὶ 20 λιρῶν τὸ παλαιὸν στρέμμα, τὰ δὲ διάφορα οἰκήματα ἀντὶ 70 λιρῶν καὶ τὸ ἀντίτιμον τοκίζει πρὸς 7 %. Πόσον ὠφελεῖται περισσότερον; Ἀπ. 90,53.

Ὁδηγία. Πρέπει πρῶτον νὰ τρέψωμεν τὰ νέα στρέμματα εἰς παλαιὰ καὶ τότε εὑρίσκομεν τὴν ἀξίαν αὐτῶν κτλ.

21) Πρὸς πόσον τοῖς ἑκατὸν πρέπει νὰ τοκισθῇ κεφάλαιόν τι, ἵνα διπλασιασθῇ μετὰ 7 ἔτη; Ἀπ. 14,28... %.

Σημ. Εἶναι ἀδιάφορον πόσον θὰ εἶναι τὸ κεφάλαιον· ὡς τοιοῦτον λαμβάνεται τὸ 100 ἢ τὸ 1 πρὸς εὐκολίαν.

22) Ἐδανείσθη τις τὴν 15 Νοεμβρίου 4500 γρόσ. πρὸς 8 % διὰ καλλιέργειαν τῶν ἀγρῶν του, μετά τινα δὲ χρόνον εὐκολυνθεὶς ἐπλήρωσε κεφάλαιον καὶ τόκους 4700 γρόσ. Μετὰ πόσον χρόνον καὶ κατὰ ποίαν ἡμερομηνίαν ἔγινεν ἡ πληρωμή;

Ἀπ. Μετὰ 6 μῆνας καὶ 20 ἡμέρας ἤτοι τὴν 5 Ἰουνίου τοῦ ἑπομένου ἔτους.

23) Εἶχέ τις 600 λίρ., τῶν ὁποίων τὸ $\frac{1}{3}$ τοκίζει πρὸς 6 %, τὸ $\frac{1}{5}$ πρὸς 4 % καὶ τὸ ἐπίλοιπον πρὸς 5 %, μὲ τοὺς τόκους δὲ τῶν χρημάτων του πληρώνει τὸ ἐνοίκιόν του. Ἀποσύρει ὅμως τὰ χρήματά του καὶ ἀγοράζει οἰκίαν, ἐκ τῆς ὁποίας ἐκτὸς τοῦ ἐνοικίου κερδίζει περιπλέον καὶ 40 λίρας. Πόσον τοῖς ἑκατὸν φέρουν τὰ χρήματά του; Ἀπ. 11,80 %.

Ὁδηγία. Εὑρίσκομεν πόσαι λίραι εἶναι τὸ $\frac{1}{3}$, τὸ $\frac{1}{5}$ καὶ τὸ ἐπίλοιπον $\frac{7}{15}$ καὶ πόσον τόκον φέρει ἕκαστον μέρος. Τὸ ἄθροισμα τῶν τόκων τούτων εἶναι ὁ τόκος ὅλων τῶν χρημάτων του. Οὗτος αὐξηθεὶς κατὰ 40 λίρας δίδει τὸ εἰσόδημα τῆς οἰκίας, τὸ ὁποῖον ἔπειτα εὑρίσκομεν πρὸς πόσα τοῖς ἑκατὸν ἀναλογεῖ.

24) Ἔμπορός τις ἠγόρασεν ἐκ Μυτιλήνης 625 ὀκάδες ἐλαίου πρὸς 26 γρόσ. τὸ λαγύνιον. Ἐπειδὴ ὅμως ἐβράδυνε νὰ πληρώσῃ, προσετέθη εἰς τὴν ἀξίαν τοῦ ἐλαίου τόκος 8 %. Πόσα μετζήτια θὰ πληρώσῃ;

Ἀπ. 140,40 μετζ.

Ὁδηγία, Τρέπομεν τὰς ὀκάδας εἰς λαγύνια καὶ εὑρίσκομεν τὴν ἀξίαν αὐτῶν, τὴν ὁποίαν αὐξάνομεν κατὰ τὸν τόκον τῶν 4 μηνῶν, καὶ ἔπειτα τρέπομεν εἰς μετζήτια.

25) Ἐὰν ὁ αὐτὸς ἔμπορος πωλήσῃ τὸ ἔλαιον μετὰ 15 μῆνας πρὸς 7 γρόσ. τὴν ὀκάν, πόσα τοῖς ἑκατὸν θὰ κερδήσῃ; Ἀπ. 44,64...%.

Ὁδηγία. Εὑρίσκομεν πόσα γρόσ. θὰ πωλήσῃ τὰς 625 ὀκ., τί κέρδος θὰ ἔχῃ καὶ πόσον ἐπὶ τοῖς ἑκατὸν ἀναλογεῖ εἰς 15 μῆνας.

26) Ἠγόρασέ τις 50 στατῆρας σάπωνος πρὸς 60 φρ. τὰ 100 χγ., τὸν ὁποῖον ἐπώλησε μετὰ 3 μῆνας πρὸς 4,50 γρόσ. τὴν ὀκάν· ἡ ἀξία τοῦ σάπωνος πρὸς μεταφορὰν καὶ τελωνειακὰ ἐπεβαρύνθη κατὰ 10 %, εἰς τὸ διάστημα δὲ τῶν τριῶν μηνῶν ἔχασε βάρος 4 %. Πόσα γρόσ. ἐκέρδησε τὸ ὅλον καὶ πόσα τοῖς ἑκατὸν κατ' ἔτος ἀπέφερον τὰ χρήματά του;

Ἀπ. ἐκέρδησε 675,84 γρόσ. ἀπέφερον δὲ 30,62...%.

Ὁδηγία. Τρέπομεν τὰ 100 χγ. εἰς ὀκ. λαμβάνοντες 1 χγ. $=0,78125$ ὀκ. καὶ τὰ φρ. εἰς γρόσ. ἔπειτα εὑρίσκομεν τὴν ἀξίαν τῆς 1 ὀκ. καὶ ὕστερον τὴν ἀξίαν τῶν 50 στατήρων, ἀφοῦ τρέψωμεν τούτους εἰς ὀκάδας. Τὴν ἀξίαν τῶν 50 στατήρων ἐπιβαρύνομεν πρὸς 10 %, τὸ δὲ βάρος ἐλαφρύνομεν κατὰ 4 %. Μετὰ ταῦτα εὑρίσκομεν πόσον θὰ λάβωμεν πωλοῦντες πρὸς 4,50 γρόσ. τὴν ὀκὰν καὶ τί κέρδος προκύπτει.

27) Ἀργυραμοιβὸς δανείζει 5 λίρ. καὶ λαμβάνει δι' ἑκάστην τόκον 10 παρ. καθ' ἡμέραν. Πόσον εἶναι τὸ ἐπιτόκιον; Ἀπ. 84,49 %.

Σημ. Κατ' ἔτος λαμβάνει 456,25 γρόσ. ἤτοι 4,2245 λίρ. τουρκ. τόκον ἀπὸ 5 λίρ.

Πρόβλημα συνθέτου τόκου ἢ ἀνατοκισμοῦ.

259. Πρόβλ. Κατέθεσέ τις εἰς Τράπεζαν ἐπὶ ἀνατοκισμῷ πρὸς 3 % 1000 φράγκα. Πόσα θὰ λάβῃ μετὰ 6 ἔτη;

Λύσις. Τὰ 100 φρ. εἰς 1 ἔτος δίδουν 3 φρ. τόκον
τὸ 1 » » » » θὰ δώσῃ $\frac{3}{100}=0,03$.

Ἐπειδὴ δὲ ὁ τόκος οὕτως θὰ μείνῃ εἰς τὴν τράπεζαν, ἀντὶ ἑνὸς φράγκου θὰ ἔχωμεν νὰ λάβωμεν $1+0{,}03$ ἤτοι $1{,}03$. 'Αντὶ 2 φρ. θὰ ἔχωμεν νὰ λάβωμεν $1{,}03+1{,}03$ ἤτοι $2\times1{,}03$ καὶ ἀντὶ 1000 φράγκ. $1000\times1{,}03$. Ταῦτα θὰ ἔχωμεν νὰ λάβωμεν ἅμα τῇ λήξει ἑνὸς ἔτους. 'Ομοίως σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν ὅτι, ἅμα τῇ λήξει ἑνὸς ἀκόμη ἔτους, ἤτοι τοῦ δευτέρου θὰ ἔχωμεν νὰ λάβωμεν $1000\times1{,}03\times1{,}03$ καὶ ἅμα τῇ λήξει τοῦ τρίτου θὰ ἔχωμεν $1000\times1{,}03\times1{,}03\times1{,}03$ καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς ἅμα τῇ λήξει τοῦ ἕκτου ἔτους θὰ ἔχωμεν νὰ λάβωμεν

$$1000\times1{,}03\times1{,}03\times1{,}03\times1{,}03\times1{,}03\times1{,}03\cdot$$

ὅθεν ἵνα εὕρωμεν πόσον γίνεται κεφάλαιον ἀνατοκιζόμενον ἐπὶ ἔτη ὡρισμένα, αὐξάνομεν τὴν μονάδα 1 κατὰ τὸν τόκον αὐτῆς καὶ λαμβάνομεν τὸ γινόμενον τόσων τοιούτων παραγόντων ὅσα εἶναι τὰ ἔτη, μὲ τὸ γινόμενον δὲ τοῦτο πολλαπλασιάζομεν τὸ κεφάλαιον καὶ θὰ ἔχωμεν τὸ ὁλικὸν ποσόν.

ΥΦΑΙΡΕΣΙΣ

260. 'Εν τῷ ἐμπορίῳ *γραμμάτιον* λέγεται τὸ ἔγγραφον, διὰ τοῦ ὁποίου ὑπόσχεταί τις νὰ πληρώσῃ εἰς ὡρισμένην ἡμερομηνίαν ὡρισμένον ποσόν. Τὸ πληρωτέον ποσὸν τὸ ἀναγραφόμενον ἐν τῷ γραμματίῳ λέγεται *ὀνομαστικὴ ἀξία* αὐτοῦ.

Τύπος γραμματίου εἶναι ὁ ἑξῆς:

Γραμμάτιον διὰ Λίρ. Τουρκ. 50

Μεθ' ἡμέρας ἑξήκοντα καὶ μίαν ἀπὸ σήμερον ὀφείλω νὰ πληρώσω εἰς τὸν κ. 'Αλ. Ναυπλιώτην ἢ εἰς τὴν διαταγὴν αὐτοῦ **Λίρας Τουρκικὰς πεντήκοντα ἀριθμ. (50),** *τὰς ὁποίας ἔλαβον παρ' αὐτοῦ τοῖς μετρητοῖς.*

'Εν Κων/πόλει, τῇ 12 8βρίου 1902

Ι. ΑΠΟΣΤΟΛΑΚΗΣ

Ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ πραγματικὸν δάνειον καὶ ἐκ τῶν τόκων αὐτοῦ ἀπὸ τῆς ὑπογραφῆς μέχρι τῆς ὁριζομένης πρὸς πληρωμὴν χρονολογίας, κατὰ τὴν ὁποίαν λέγουσιν ὅτι *λήγει* τὸ γραμμάτιον.

Εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ γραμμάτιον πρὸ τῆς λήξεως αὐτοῦ δὲν ἔχει τὴν ἀναγραφομένην ἐν αὐτῷ ἀξίαν· διότι, ἐὰν δανεισθῇ τις χρήματα καὶ πρόκηται νὰ πληρώσῃ ταῦτα μετὰ 10 ἡμέρας, ὁ τόκος θὰ εἶναι ὀλιγώτερος παρὰ ἐὰν πρόκηται νὰ πληρώσῃ ταῦτα μετὰ 150 ἡμ. Καθ' ἑκάστην ἡμέραν ἡ πραγματικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου αὐξάνεται, εἰς τὸ τέλος δὲ τῆς προθεσμίας ἡ πραγματικὴ ἀξία θὰ εἶναι τὸ δάνειον καὶ οἱ τόκοι αὐτοῦ μέχρι τῆς ἡμέρας ἐκείνης, δηλ. ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία αὐτοῦ.

Ὅταν ὁ κάτοχος τοῦ γραμματίου λάβῃ ἀνάγκην χρημάτων πρὸ τῆς λήξεως αὐτοῦ, δύναται νὰ πωλήσῃ τὸ γραμμάτιον, ἀλλὰ δὲν λαμβάνει ὁλόκληρον τὸ ἐπ' αὐτοῦ ἀναγραφόμενον ποσόν.

Προεξόφλησις τοῦ γραμματίου λέγεται ἡ πώλησις αὐτοῦ πρὸ τῆς λήξεως, ἔτι δὲ καὶ τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον λαμβάνει ὁ πωλῶν τὸ γραμμάτιον.

Ὑφαίρεσις δὲ λέγεται ὁ ἀριθμός, κατὰ τὸν ὁποῖον ἐκπίπτει ἡ ὀνομαστικὴ τοῦ γραμματίου ἀξία.

Ἡ ὑφαίρεσις γίνεται κατὰ δύο τρόπους καὶ λέγεται *ἐξωτερικὴ* καὶ *ἐσωτερική*.

ΥΦΑΙΡΕΣΙΣ ΕΞΩΤΕΡΙΚΗ

261. *Ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις* λέγεται ὁ τόκος τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας τοῦ γραμματίου ἀπὸ τῆς ἡμέρας τῆς προεξοφλήσεως μέχρι τῆς λήξεως αὐτοῦ.

Εὕρεσις τῆς ὑφαιρέσεως καὶ τῆς προεξοφλήσεως.

262. *Πρόβλημα*. Γραμμάτιον 1800 γροσ. προεξοφλεῖται 8 μῆν. πρὸ τῆς λήξεως αὐτοῦ πρὸς 5 %· πόση εἶναι ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις αὐτοῦ;

Ἡ ζητουμένη ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις εἶναι ὁ τόκος τῶν 1800 γροσ. εἰς 8 μῆνας.

Διάταξις τῶν δεδομένων

100 γρόσ.	12 μῆν.	5 τόκ.	
1800 »	8	χ	ὅθεν $\chi=\frac{5\times1800\times8}{100\times12}=60.$

Ἡ προεξόφλησις θὰ εἶναι $1800-60=1740$.

Εὕρεσις τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας διὰ τῆς προεξοφλήσεως.

263. *Πρόβλ.* Πόση εἶναι ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία γραμματίου, τὸ ὁποῖον προεξωφλήθη ἀντὶ 750 φρ. 80 ἡμέρας πρὸ τῆς λήξεως αὐτοῦ πρὸς 15 %;

Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου λαμβάνομεν βοηθητικόν τι γραμμάτιον, τοῦ ὁποίου εἶναι γνωστὴ ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία καὶ ἡ ὑφαίρεσις ἑνὸς ἔτους· τοιοῦτον εἶναι τὸ ἔχον ὀνομαστικὴν ἀξίαν 100 φρ. τοῦ ὁποίου ἡ ὑφαίρεσις ἑνὸς ἔτους εἶναι 15 καὶ εὑρίσκομεν τὴν προεξόφλησιν αὐτοῦ 80 ἡμέρας πρὸ τῆς λήξεώς του. Διὰ τῆς προεξοφλήσεως τοῦ βοηθητικοῦ γραμματίου καὶ τῆς δοθείσης ἐν τῷ προβλήματι εὑρίσκομεν τὴν ζητουμένην ὀνομαστικὴν ἀξίαν.

Γραμμάτιον 100 φρ. εἰς 365 ἡμ. πάσχει 15 φρ. ὑφαίρεσιν
» » » » 1 » θὰ πάθῃ $\frac{15}{365}$ » »
» » » » 80 » » » $\frac{15\times80}{365}=3,288$ φρ.

Ὥστε τοῦ βοηθητικοῦ τούτου γραμματίου ἡ μὲν ὑφαίρεσις εἶναι 3, 29, ἡ δὲ προεξόφλησις $100-3,288=96,712$.

Ὅταν προεξ. εἶναι 96,712 φρ. ὑφαίρ. 3,288 φρ. καὶ ἀξία 100 φρ.
» » » 1 » $\frac{3,288}{96,712}$ » » $\frac{100}{96,712}$ »
» » » 750 » $\frac{3,288\times750}{96,712}$ » » $\frac{100\times750}{96,712}$ »

Ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις εὑρίσκομεν ὀνομαστικὴν μὲν ἀξίαν τοῦ γραμματίου 775,498... περίπου, ὑφαίρεσιν δὲ 25,498... περίπου.

Ὅταν ἔχωμεν τὴν ὀνομαστκὴν ἀξίαν γραμματίου καὶ τὴν προἐξόφλησιν, ἡ ὑφαίρεσις εἶναι ἡ διαφορὰ τούτων, ἑπομένως ὑφαίρεσις εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα εἶναι

$$775,498 - 750 = 25,498$$

Εὕρεσις τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας διὰ τῆς ὑφαιρέσεως.

264. *Πρόβλ.* Πόση εἶναι ἡ ὀνομαστκὴ ἀξία γραμματίου, τὸ ὁποῖον προεξοφληθὲν 3 μῆνας πρὸ τῆς λήξεως αὐτοῦ πρὸς 20% ἔπαθεν ὑφαίρεσιν 150 φρ.;

Λύσις. Ἡ ὑφαίρεσις 150 φρ. εἶναι ὁ τόκος τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας εἰς 3 μῆνας, ὅθεν ἔχομεν πρὸς λύσιν τὸ ἑξῆς πρόβλημα, τὸ ὁποῖον καὶ διατάσσομεν.

Τόκος 20 φρ. εἰς 12 μῆνας προέρχεται ἀπὸ κεφάλ. 100 φρ.
» 150 » » 3 » θὰ προέλθῃ » » 2 »

ἐκ τούτων εὑρίσκομεν $\chi = \frac{100 \times 150 \times 12}{20 \times 3} = 3\,000$ φρ.

Ἐὰν θέλωμεν καὶ τὴν προεξόφλησιν, αὕτη εἶναι

$$3000 - 150 = 2850 \text{ φρ.}$$

Εὕρεσις τοῦ ἐπιτοκίου.

265. *Πρόβλ.* Πρὸς πόσα τοῖς ἑκατὸν προεξοφλεῖται γραμμάτιον 840γροσ. 8 μῆνας πρὸ τῆς λήξεως αὐτοῦ ἀντὶ 750 γροσ.;

Λύσις. Ἡ διαφορὰ 840—750=90 εἶναι ἡ ὑφαίρεσις ἤτοι ὁ τόκος, ὅστις ἐκρατήθη. Ἑπομένως ἔχομεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα τόκου.

Κεφάλαιον 840 γρόσια εἰς 8 μῆνας φέρει τόκον 90 γρόσ.
» 100 » » 12 » θὰ φέρῃ » χ »

Εὑρίσκομεν δὲ

$$\chi = \frac{90 \times 100 \times 12}{840 \times 8} = 16\tfrac{1}{14}$$

ὥστε ἡ ὑφαίρεσις ἐγένετο πρὸς 16 % περίπου.

Εὕρεσις τοῦ χρόνου.

266. *Πρόβλ.* Πόσον χρόνον πρὸ τῆς λήξεως αὐτοῦ προεξωφλήθη γραμμάτιον ὀνομαστικῆς ἀξίας 1400 φρ. πρὸς 14 % μὲ ὑφαίρεσιν 147 φρ.;

Λύσις. Τὰ 147 φρ. εἶναι ὁ τόκος τῶν 1400 πρὸς 14 $^0/_0$ εἰς τὸν ζητούμενον χρόνον. Ἑπομένως πρόκειται πρὸς λύσιν τὸ ἑξῆς πρόβλημα τόκου:

Κεφάλαιον 100 φρ. φέρει τόκον 14 φρ. εἰς 12 μῆνας.
» 1400 » θὰ φέρῃ » 147 » » χ »

Λύοντες διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα θὰ ἔχωμεν

$$\chi = \frac{12 \times 100 \times 147}{1400 \times 14} = 9 \text{ μῆνας.}$$

Προβλήματα.

Εἰς τὰ προβλήματα τῆς ὑφαιρέσεως ὑπάγονται καὶ τὰ προβλήματα τῶν κερδῶν καὶ ζημιῶν ἐπὶ τοῖς ἑκατόν, τινὰ τῶν ὁποίων ἀναφέρομεν ἤδη ἐν σελ. 187-8.

1) Γραμμάτιον 100 φρ. προεξοφλεῖται 1 ἔτος πρὸ τῆς λήξεως αὐτοῦ πρὸς 15 $^0/_0$· πόση εἶναι ἡ προεξόφλησις καὶ πόση ἡ ὑφαίρεσις;

Λύσις. Ὑφαίρεσις εἶναι ὁ τόκος τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας 100 φρ. εἰς 1 ἔτος, ὅστις εἶναι 15· προεξόφλησις δὲ 100—15=85.

Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι οὐχὶ διὰ 100 φρ. ἀλλὰ διὰ 85, τὰ ὁποῖα λαμβάνει ὁ προεξοφλῶν, πληρώνει τόκον 15.

2) Ἐὰν τις διὰ 85 φρ. πληρώσῃ τόκον εἰς ἓν ἔτος 15 φρ. πρὸς πόσον ἐπιτόκιον ἐδανείσθη; 'Απ. 17,65... $^0/_0$.

3) Ἠγόρασέ τις ἐμπορεύματα ἀξίας 1000 φρ. τὰ ὁποῖα θὰ μετρήσῃ 4 μῆνας μετὰ τὴν παραλαβὴν τῶν ἐμπορευμάτων. Ἀλλ' ἐὰν ἤθελε μετρήσῃ ταῦτα, ἅμα λάβῃ τὰ ἐμπορεύματα, γίνεται εἰς αὐτὸν ἔκπτωσις 2 $^0/_0$. Πόσον θὰ πληρώσῃ, ἂν ἤθελε προτιμήσῃ τοῦτο; 'Απ. 960 φρ.

Ὁδηγία. Εὑρίσκομεν τὸν τόκον τοῦ 1000 εἰς 4 μῆνας καὶ ἀφαιροῦμεν.

Προσθήκη. Νὰ τραπῶσι τὰ 960 φρ. εἰς ρούβλια.

'Απ. $\frac{7.5 \times 960}{20} = 360$.

4) Πόση εἶναι ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις γραμματίου 3000 γροσ., τὸ ὁποῖον λήγει τὴν 31 Δεκεμβρίου καὶ προεξοφλεῖται πρὸς 10 $_0/^0$ τὴν 15 Ὀκτωβρίου; 'Απ. 63,29 γρόσ.

Σημ. Ἡ ἡμέρα τῆς προεξοφλήσεως δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν, ἐνῷ ἡ ἡμέρα τῆς λήξεως λαμβάνεται· ὅθεν αἱ ἡμέραι εἶναι 77.

Προσθήκη. Νὰ τραπῶσι τὰ 63,29 γρόσ. εἰς γρόσ. χρυσᾶ. 'Απ. 58,60.

5) Γραμμάτιον 420 ρουβλίων, τὸ ὁποῖον λήγει τὴν 20 Ὀκτωβρίου, προεξοφλεῖται τὴν 11 Αὐγούστου ἀντὶ 1000 φρ. Νὰ εὑρεθῇ, ἂν ἔπαθεν ὑφαίρεσιν καὶ πρὸς πόσα τοῖς ἑκατόν; Ἀπ. 55,86 %.

Ὁδηγία. Τρέπομεν πρῶτον τὰ φράγκα εἰς ρούβλια ὑπολογίζοντες τὸ εἰκοσάφραγκον πρὸς 7,5 ρούβλια καὶ εὑρίσκομεν εὐκόλως τὴν ὑφαίρεσιν· μετὰ ταῦτα ἔχομεν ἁπλοῦν πρόβλημα τόκου.

6) Γραμμάτιον 89 φιορινίων λῆγον τὴν 31 Αὐγούστου προεξοφλεῖται πρὸς 25 % ἀντὶ 842 γροσ. πότε ἐγένετο ἡ προεξόφλησις;

Ἀπ. 9 τοῦ Νοεμβρίου.

Ὁδηγία. Τρέπομεν τὰ φιορίνια εἰς γρόσια καὶ βλέπομεν πόση εἶναι ἡ ὑφαίρεσις μετὰ ταῦτα εὑρίσκομεν εἰς πόσας ἡμέρας ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία εἰς γρόσια δίδει τόκον τὴν ὑφαίρεσιν ταύτην καὶ ὀπισθοχωροῦμεν κατὰ τὰς ἡμέρας ταύτας ἐκ τῆς ἡμέρας τῆς λήξεως.

7) Πόση εἶναι ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία γραμματίου, τὸ ὁποῖον προεξοφλεῖται 85 ἡμέρας πρὸ τῆς λήξεως αὐτοῦ πρὸς 12 % ἀντὶ 840 γροσ.;

Ἀπ. 864,19... γρόσ.

Σημ. Ὁ τραπεζίτης ὁ προεξοφλῶν γραμμάτιόν τι ἐκτὸς τῆς ὑφαιρέσεως κρατεῖ ἐπὶ τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας ἀνεξαρτήτως χρόνου δικαίωμα προμηθείας (μεσιτείας)· τὸ δικαίωμα τοῦτο κανονίζεται ἐπὶ τοῖς ἑκατόν.

8) Πόσον θὰ λάβῃ ἔμπορος ἔχων γραμμάτιον 3600 γροσ., τὸ ὁποῖον προεξοφλεῖ 5 μῆνας πρὸ τῆς λήξεως αὐτοῦ μὲ ὑφαίρεσιν 14 % καὶ προμήθειαν 0,5 %; Ἀπ. 3372.

Ὁδηγία. Εὑρίσκομεν πρῶτον τὴν ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν καὶ ἔπειτα τὴν προμήθειαν 18 γρόσ. προσθέτοντες τὰ δύο ταῦτα καὶ ἀφαιροῦντες ἀπὸ τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας ἔχομεν τὸ ζητούμενον.

9) Πόση εἶναι ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία γραμματίου, τοῦ ὁποίου ἡ ὑφαίρεσις εἶναι 140 γρόσ. καὶ τὸ ὁποῖον προεξωφλήθη 135 ἡμέρας πρὸ τῆς λήξεως αὐτοῦ πρὸς 6 %; Ἀπ. 6308,64 γρόσ.

Ὁδηγία. Εὑρίσκομεν τὸ κεφάλαιον, τὸ ὁποῖον εἰς 135 ἡμέρας πρὸς 6 % δίδει τόκον 140 γρόσ.

10) Γραμμάτιον 650 σελινίων προεξοφλεῖται 4 μῆνας πρὸ τῆς λήξεως αὐτοῦ ἀντὶ 3800 γροσ. Πρὸς πόσα τοῖς ἑκατὸν ἐγένετο ἡ προεξόφλησις;

Ἀπ. 7,69 %.

Ὁδηγία. Τρέπομεν τὰ σελίνια εἰς γρόσ. λαμβάνοντες 1 σελ. ἴσον πρὸς 6 γρόσ. καὶ θὰ ἔχωμεν ἁπλοῦν πρόβλημα τόκου, ἐν ᾧ ζητεῖται τὸ ἐπιτόκιον.

11) Ἔμπορος ἠγόρασεν ἐμπορεύματα ἀξίας 150 λιρ., μὴ δυνάμενος ὅμως νὰ πληρώσῃ ἀμέσως ἐκδίδει γραμμάτιον 4 μηνῶν μὲ τόκον 15 %· πόση θὰ εἶναι ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου; Ἀπ. 157,50.

Ὁδηγία. Θὰ εὕρωμεν τὸν τόκον τῶν 150 λιρ. εἰς 4 μῆνας πρὸς 15 % καὶ θὰ τὸν προσθέσωμεν εἰς τὰς 150 λίρας.

12) Ἐὰν ὁ ἔμπορος ἐξέδιδε τὸ ἀνωτέρω γραμμάτιον μὲ ὀνομαστικὴν ἀξίαν 3600 φρ. πότε θὰ ἔληγεν; Ἀπ. Μετὰ 4 μῆν. 12 ἡμ. περίπου.

Ὁδηγία. Θὰ τρέψωμεν τὰς λίρ. εἰς φράγκα λαμβάνοντες τὴν τουρκικὴν λίρ. 22,68 φρ. καὶ θὰ ἀφαιρέσωμεν. Ἡ διαφορὰ εἶναι ὁ τόκος τῶν 150 λιρ. Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν πρόβλημα τόκου, ἐν ᾧ ἄγνωστος εἶναι ὁ χρόνος.

13) Ἔμπορος ὀφείλει νὰ πληρώσῃ 2200 γρόσ. τὴν 13 Νοεμβρίου, ἀλλὰ τὴν 15 Αὐγούστου τοῦ αὐτοῦ ἔτους πρὸς ἐξόφλησιν τοῦ χρέους τῷ δίδει ἓν γραμμάτιον 840 γροσ. λήξεως 31 Δεκεμβρίου τοῦ αὐτοῦ ἔτους καὶ τὸ ὑπόλοιπον εἰς μετρητά. Ζητεῖται πόσα τὰ μετρητά, ἐὰν τὸ ἐπιτόκιον εἶναι 6 %. Ἀπ. 1346,45.

Ὁδηγία. Θὰ εὕρωμεν πόσον εἶναι τὸ χρέος του τὴν 15 Αὐγούστου ἤτοι 90 ἡμέρας πρὸ τῆς λήξεως τῆς προθεσμίας του καὶ ἡ ἀξία τοῦ γραμματίου, τὸ ὁποῖον ἔδωκεν 138 ἡμέρας πρὸ τῆς λήξεως αὐτοῦ· ἡ διαφορὰ τῶν δύο τούτων εἶναι τὸ μετρηθὲν ποσόν.

Προσθήκη. Νὰ εὑρεθῇ ὁ καθαρὸς ἄργυρος ὁ περιεχόμενος εἰς τὰ μετρηθέντα χρήματα.

---

* ΥΦΑΙΡΕΣΙΣ ΕΣΩΤΕΡΙΚΗ

267. Ὅταν τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον πληρώνει ὁ ἐξαργυρῶν τὸ γραμμάτιον, εἶναι τόσον, ὥστε αὐξηθὲν κατὰ τὸν τόκον αὐτοῦ ἀπὸ τῆς ἡμέρας τῆς προεξοφλήσεως μέχρι τῆς λήξεως δίδει τὴν ὀνομαστικὴν ἀξίαν τοῦ γραμματίου, τότε τὸ μὲν πληρωθὲν ποσὸν λέγεται καὶ πάλιν *προεξόφλησις*, ὁ δὲ τόκος *ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις*. Ὥστε

Προεξόφλησις + ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις = ὀνομαστικὴ ἀξία.

Εὕρεσις τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως καὶ τῆς προεξοφλήσεως

268. *Πρόβλ.* Γραμμάτιον 104 γροσ. προεξοφλεῖται ἓν ἔτος πρὸ τῆς λήξεως αὐτοῦ πρὸς 4 %· πόση εἶναι ἡ ἐσωτερικὴ αὐτοῦ ὑφαίρεσις ;

Λύσις. Ἐπειδὴ τὰ 100 γρόσ. εἰς ἓν ἔτος φέρουν τόκον 4 γρόσ., τὰ δύο δὲ ταῦτα προστιθέμενα δίδουν τὴν ὀνομαστικὴν ἀξίαν, ἕπεται ὅτι προεξόφλησις εἶναι 100 γρόσ, ἐσωτερικὴ δὲ ὑφαίρεσις 4 γρόσ.

269. *Πρόβλ.* Γραμμάτιον 1800 γρόσ. ἐξαργυροῦται 3 μῆνας πρὸ τῆς λήξεως αὐτοῦ πρὸς 8 %· πόση εἶναι ἡ ἐσωτερικὴ αὐτοῦ ὑφαίρεσις καὶ πόση ἡ προεξόφλησις ;

Λύσις. Πρὸς εὕρεσιν τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως λαμβάνομεν βοηθητικόν τι κεφάλαιον, ὡς τοιοῦτον ἐκλέγομεν τὰ 100 γρόσ. καὶ βλέπομεν πόσον γίνεται τοῦτο μετὰ τοῦ τόκου αὐτοῦ εἰς 3μῆν.
Ὁ τόκος τῶν 100

εἰς 12 μῆνας εἶναι 8
» 1 μῆνα θὰ » $\frac{8}{12}$
καὶ » 3 μῆνας » » $\frac{8\times3}{12}=2$.

Ἂν λοιπὸν δανεισθῇ τις σήμερον 100 γρόσ., θὰ πληρώσῃ μετὰ 3 μῆνας 102 γρόσ. Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ὑπογράφει πρὸς τοῦτο γραμμάτιον, τὸ ὁποῖον δίδει εἰς τὸν δανειστήν.

Πρὸς τὸ βοηθητικὸν τοῦτο γραμμάτιον, τὸ ὁποῖον λήγει, ὅπως καὶ τὸ δοθέν, μετὰ 3 μῆνας, συγκρίνομεν τὸ δοθὲν οὕτως.

Εἰς γραμμάτ. 102 γροσ. ἐσωτ. ὑφαίρ. εἶναι 2, προεξόφλ. δὲ 100
» » 1 » » » θὰ » $\frac{2}{102}$ » » $\frac{100}{102}$
» » 1800 » » » » $\frac{2\times1800}{102}$ » » $\frac{100\times1800}{102}$

Σημ. Τῆς μεθόδου ταύτης γίνεται χρῆσις ἐν Ἀγγλίᾳ, εἰς τὰ ἄλλα δὲ κράτη καὶ μάλιστα ἐν Γαλλίᾳ εἶναι συνηθεστέρα ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις, ὅταν μάλιστα ἡ προεξόφλησις γίνεται εἰς χρόνον μικρότερον τῶν 3 μηνῶν πρὸ τῆς λήξεως, ὁπότε ἡ ζημία εἶναι πολὺ μικρά.

Ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις εὑρίσκομεν ὑφαίρεσιν 35, 29.... προεξόφλησιν δὲ 1764,7....

Ἐὰν εἶναι γνωστὴ μόνον ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις 35,29, ἡ προεξόφλησις θὰ εἶναι 1800—35,29=1764,71....

Ἐὰν δὲ εἶναι γνωστὴ μόνον ἡ προεξόφλησις 1764,70, ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις θὰ εἶναι 1800—1764,70=35,30.

Σημ. Τὰ μικρὰ λάθη τὰ ἕνεκα τῆς παραλείψεως δεκαδικῶν τινων εἶναι ἄνευ σημασίας καὶ παραβλέπονται.

Δοκιμή. Τὰ 1764,70 γρόσ. τοκιζόμενα 3 μῆνας πρὸς 8 % πρέπει νὰ δίδωσι τόκον, ὅστις προστιθέμενος εἰς τὰ 1764,70 νὰ ἀποτελῇ τὴν ὀνομαστικὴν ἀξίαν τοῦ γραμματίου. Ὁ τόκος οὗτος πάντοτε θὰ εἶναι ἴσος πρὸς τὴν ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν.

Εὕρεσις τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας.

(διὰ τῆς προεξοφλήσεως καὶ τοῦ χρόνου)

270. *Πρόβλ.* Πόση εἶναι ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία γραμματίου, τὸ ὁποῖον προεξοφλεῖται ἀντὶ 750 φρ. 80 ἡμέρας πρὸ τῆς λήξεως αὐτοῦ πρὸς 15 % ;

Λύσις. Ἡ ζητουμένη ὀνομαστικὴ ἀξία θὰ εἶναι ἡ προεξόφλησις 750 φρ. καὶ οἱ τόκοι αὐτῆς μέχρι τῆς λήξεως· ὥστε ἔχομεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα τόκου :

100 φρ. εἰς 365 ἡμέρας φέρουν τόκον 15 φρ.
750 » » 80 » θὰ » » χ

ὅθεν $\chi=\frac{15\times80\times750}{100\times365}=24,65....$

Ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία θὰ εἶναι 750+24,65=774,65.

Εὕρεσις τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας

διὰ τῆς ὑφαιρέσεως καὶ τοῦ χρόνου

271. *Πρόβλ.* Πόση εἶναι ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία γραμματίου, τὸ ὁποῖον προεξοφληθὲν 3 μῆνας πρὸ τῆς λήξεως αὐτοῦ πρὸς 20 % ἔπαθεν ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν 150 φρ. ;

Λύσις. Ἡ ζητουμένη ὀνομαστικὴ ἀξία θὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῆς ὑφαιρέσεως 150 φρ. καὶ τῆς προεξοφλήσεως ἤτοι τοῦ κεφαλαίου, τὸ ὁποῖον εἰς 3 μῆνας φέρει τόκον 150 φρ. Ὥστε ἔχομεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα.

Τόκος 20 φρ. εἰς 12 μῆνας προέρχεται ἀπὸ κεφάλ. 100
» 150 » » 3 » θὰ προέλθῃ » » χ·

ὅθεν $\chi = \frac{100 \times 150 \times 12}{20 \times 3} = 3000$.

Ἡ δὲ ὀνομαστικὴ ἀξία εἶναι $3000 + 150 = 3150$.

Εὕρεσις τοῦ ἐπιτοκίου.

272. *Προβλ*. Πρὸς πόσα τοῖς ἑκατὸν προεξοφλεῖται γραμμάτιον 840 γροσ. 4 μῆνας πρὸ τῆς λήξεως αὐτοῦ, ἀντὶ 750 γροσ. μὲ ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν :

Λύσις. Τὸ γραμμάτιον ἔπαθεν ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν $840 - 750 = 90$ γρόσ. Ἡ ὑφαίρεσις αὕτη εἶναι ὁ τόκος τῶν 750 γρ. εἰς 4 μῆνας. Ζητεῖται λοιπὸν πρὸς πόσον ἐπιτόκιον 750 γρόσ. εἰς 4 μῆνας δίδουν τόκον 90 γρόσ.

Εὑρίσκεται δέ, ὅτι τὸ ἐπιτόκιον εἶναι $\frac{90 \times 100 \times 12}{750 \times 4} = 36\ \%$.

Εὕρεσις τοῦ χρόνου.

273. *Προβλ*. Πόσον χρόνον πρὸ τῆς λήξεως αὐτοῦ προεξωφλήθη γραμμάτιον ὀνομαστικῆς ἀξίας 1400 γρόσ. πρὸς 14 % μὲ ἐσωτερ. ὑφαίρεσιν 147 γρόσ.

Λύσις. Ἡ προεξόφλησις τοῦ γραμματίου εἶναι $1400 - 147 = 1253$.

Εὑρεθείσης τῆς προεξοφλήσεως, τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸ ἑξῆς : Εἰς πόσον χρόνον κεφάλαιον 1253 γροσίων πρὸς 14 % φέρει τόκον 147 γρόσ. Εὑρίσκομεν δέ, ὅτι ὁ ζητούμενος χρόνος χ εἶναι $\frac{147 \times 100}{14 \times 1253} = 10$ μῆν. 2 ἡμέρ. περίπου.

Προβλήματα.

1) Πόση εἶναι ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις καὶ πόση ἡ προεξόφλησις γραμματίου 2850 γροσ. τὸ ὁποῖον προεξοφλεῖται 5 μῆνας πρὸ τῆς λήξεως αὐτοῦ; Ἀπ. ;

2) Ἔμπορος μεταφέρει ἐξ Ἀγγλίας εἰς Ὀδησσὸν 35 ὑάρδας ὑφάσματος, τοῦ ὁποίου ἑκάστη ἀξίζει 10 σελίνια. Πρὸς μεταφορὰν ἐπλήρωσε 10 φρ., τελωνειακὰ δὲ ἐπλήρωσε 15 % ἐπὶ τῆς ἀξίας. Πόσα ρούβλια πρέπει νὰ πωλῇ τὸν ρωσσικὸν ἀρσίν, διὰ νὰ κερδίζῃ 40 % ἐπὶ τῶν ἐξόδων του;
Ἀπ. 6,03 ρούβλια.

Ὁδηγία. Ἀφοῦ εὕρωμεν τὴν ἀξίαν ὅλου τοῦ ὑφάσματος εἰς σελίνια, προσθέτομεν 15 % καὶ τρέπομεν ταῦτα εἰς φράγκα, εἰς τὰ ὁποῖα προσθέτομεν καὶ τὰ ἔξοδα τῆς μεταφορᾶς. Τὸ ἄθροισμα τοῦτο αὐξάνομεν κατὰ 40 % καὶ τρέπομεν τὸ ὅλον εἰς ρούβλια, τὰς δὲ ὑάρδας τρέπομεν εἰς ρωσσικοὺς ἀρσίν. Διαιροῦντες τὰ ρούβλια διὰ τῶν πήχεων θὰ ἔχωμεν τὸ ζητούμενον.

ΠΕΡΙ ΜΕΣΩΝ ΟΡΩΝ

Ὁρισμός.

274. *Μέσος ὅρος* πολλῶν ὁμοειδῶν ἀριθμῶν λέγεται τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις δεικνύει πόσοι εἶναι οἱ προσθετέοι.

Π. χ. μέσος ὅρος τῶν ἀριθμῶν 30 ὀκ. 50 ὀκ. 28 ὀκ. εἶναι

$$\frac{30+50+28}{3}=\frac{108}{3}=36 \text{ ὀκ.}$$

Προβλήματα.

Πρόβλημα. Ἔμπορος ἐπώλησε τὴν δευτέραν 3 λίρας, τὴν τρίτην 250 γρόσ., τὴν τετάρτην 2,5 λίρας, τὴν πέμπτην 5 εἰκοσάφρ. τὴν παρασκευὴν 8 λίρας καὶ τὸ σάββατον 175 γρόσ. πόσαι λίραι εἶναι κατὰ μέσον ὅρον ἡ καθημερινὴ πώλησις;

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ μέσου ὅρου τρέπομεν τὰς διαφόρους πωλήσεις εἰς λίρας· διότι οἱ ἀριθμοί, τῶν ὁποίων ζητοῦμεν τὸν μέσον ὅρον, πρέπει πάντοτε νὰ προκύπτωσιν ἐκ τῆς αὐτῆς μονάδος καὶ νὰ παριστῶσι τὸ αὐτοῦ πρᾶγμα, ἤτοι νὰ εἶναι ὁμώνυμοι. Ἐπειδὴ δὲ τὰ 250γρ. εἶναι 2,31 λίρ. τουρκ. τὰ δὲ 5 εἰκοσάφρ. εἶναι 4,39λίρ. τουρκ. καὶ 175 γρόσ. εἶναι 1,62 λίρ. τουρκ., ὁ ζητούμενος μέσος ὅρος εἶναι

$$\frac{3+2,31+2,5+4,39+8+1,62}{6}=\frac{21,82}{6}=3,637\ldots \text{ λίρ.}$$

Πρόβλημα. Ἐὰν διὰ θερμομέτρου ἐν ὑπαίθρῳ καὶ ὑπὸ σκιὰν κάμωμεν τέσσαρας παρατηρήσεις, μίαν πρὸ τῆς ἀνατολῆς τοῦ ἡλίου, ὁπότε εὑρίσκεται ἡ ἐλαχίστη θερμοκρασία τοῦ ἡμερονυκτίου, δευτέραν κατὰ τὰς 3 μ. μ., ὁπότε εὑρίσκεται ἡ μεγίστη, τρίτην μετὰ τὴν δύσιν τοῦ ἡλίου καὶ τετάρτην κατὰ τὸ μεσονύκτιον, καὶ εὕρωμεν κατὰ σειρὰν τὰς ἑξῆς θερμοκρασίας 7^0, 18^0, 12^0, 10^0, πόση εἶναι ἡ μέση θερμοκρασία τῶν τεσσάρων τούτων;

Ἀπ. 11,75.

Σημ. Αὕτη λέγεται μέση θερμοκρασία τῆς ἡμέρας.*

Πρόβλημα. Ἔχων τις τρεῖς οἰκίας ἐκ τῆς πρώτης λαμβάνει ἐνοίκιον 60 λίρ. τουρκ. κατ' ἔτος, ἐκ τῆς δευτέρας 75 καὶ ἐκ τῆς τρίτης 43· πόσον εἰσπράττει κατ' ἔτος κατὰ μέσον ὅρον;

Ἀπ. 59,33 λίρ. τουρκ.

Πρόβλημα. Ἔχει τις ἐλαιῶνα, ὅστις παρήγαγε πρὸ τεσσάρων ἐτῶν 400 ἀγιάρια ἐλαίου, τὸ ἑπόμενον ἔτος 50 ἀγιάρια, πέρυσιν 120 ἀγιάρ. καὶ ἐφέτος 382 ἀγιάρ. πόσον παρήγαγε κατὰ μέσον ὅρον κατ' ἔτος τὴν τετραετίαν ταύτην; Ἀπ. 238 ἀγιάρ.

Προσθήκη Νὰ τραπῶσι τὰ 238 ἀγιάρια εἰς ὀκάδας.

Ἀπ. 1487,50.

---

* Ἰδὲ Φυσικὴν Πειραματικὴν Ἀλ. Εὐσταθιανοῦ σελ. 142.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΜΕΡΙΣΜΟΥ

Ὁρισμός.

275. Ἀριθμοὶ ὡρισμένοι τὸ πλῆθος λέγονται ἀνάλογοι πρὸς ἰσαρίθμους ἄλλου, ὅταν οἱ μὲν προκύπτουν ἐκ τῶν δὲ διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἢ διαιρέσεως διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ π. χ.

οἱ ἀριθμοὶ	15,	20,	40
εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς	3,	4,	8,

ἀλλὰ καὶ οὗτοι πρὸς τοὺς πρώτους, διότι

$$15=5\times3,\quad 20=5\times4,\quad 40=5\times8$$
$$3=\frac{15}{5},\quad 4=\frac{20}{5},\quad 8=\frac{40}{5}.$$

Προβλήματα.

276. *Πρόβλ.* Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 75 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν 3, 4, 8, ἤτοι εἰς μέρη τὰ ὁποῖα νὰ προκύπτουν ἐκ τῶν 3, 4, 8, διὰ πολλαπλασιασμοῦ τούτων ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Λύσις. Ἐὰν μεριστέος ἀριθμὸς εἶναι $3+4+8$, ἤτο 15, εἶναι φανερόν, ὅτι τὰ μερίδια θὰ εἶναι τὸ α´ 3, τὸ β´ 4 καὶ τὸ γ´ 8· ἂν ὁ ἀριθμὸς γίνῃ διπλάσιος, καὶ τὰ μερίδια θὰ γίνουν διπλάσια, καὶ ἂν τριπλάσιος, τριπλάσια· ἂν δὲ ὁ ἀριθμὸς γίνῃ 1, τὰ μερίδια θὰ εἶναι τὸ πρῶτον $\frac{3}{15}$, τὸ δεύτερον $\frac{4}{15}$ καὶ τὸ τρίτον $\frac{8}{15}$· ἂν δὲ ὁ ἀριθμὸς γίνῃ 75, τὰ μερίδια θὰ εἶναι

$$\frac{3\times75}{15},\quad \frac{8\times75}{15},\quad \frac{47\times5}{15},$$ ἤτοι 15, 20, 40.

Διάταξις τῶν πράξεων.

Ὅταν μεριστέος εἶναι	15,	τὰ μερίδια θὰ εἶναι	3	4	8
» » »	1	» »	$\frac{3}{15}$,	$\frac{4}{15}$,	$\frac{8}{15}$
» » »	75	» »	$\frac{3\times75}{15}$,	$\frac{4\times75}{15}$,	$\frac{8\times75}{15}$

ὅθεν $\alpha' = 15,\ \beta' = 20,\ \gamma' = 40.$

277. *Πρόβλ.* Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 171 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}$.

Λύσις 1η. Εὑρίσκομεν πρῶτον τὸ ἄθροισμα $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{19}{20}$ καὶ λέγομεν: Ἐὰν ἔχωμεν νὰ μερίσωμεν τὸν ἀριθμὸν $\frac{19}{20}$, τὰ μερίδια θὰ εἶναι $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, καὶ ἐὰν ὁ μεριστέος εἶναι $\frac{1}{20}$,

» » $\frac{1}{4\times19}$, $\frac{1}{2\times19}$, $\frac{1}{5\times19}$ » » » $\frac{20}{20}$,

» » $\frac{1\times20}{4\times19}$, $\frac{1\times20}{2\times19}$, $\frac{1\times20}{5\times19}$ » » » 171

» » $\frac{20\times171}{4\times19}$, $\frac{20\times171}{2\times19}$, $\frac{20\times171}{5\times19}$

ὅθεν τὸ πρῶτον μερίδιον θὰ εἶναι 45, τὸ δεύτερον 90 καὶ τὸ τρίτον 36.

Λύσις 2α. Τὸ πρόβλημα τοῦτο δυνάμεθα νὰ λύσωμεν καὶ ὡς ἑξῆς.

Ὅταν ὁ μεριστέος εἶναι $\frac{19}{20}$, τὰ μερίδια θὰ εἶναι $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$· ὅταν ὁ μεριστέος γίνῃ 29κις μεγαλείτερος, τὰ μερίδια θὰ γίνωσιν ὡσαύτως, ἤτοι ὅταν ὁ μεριστέος εἶναι 19, τὰ μερίδια θὰ εἶναι

$$\frac{20}{4}=5,\quad \frac{20}{2}=10,\quad \frac{20}{5}=4 \text{ κτλ.}$$

278. *Πρόβλ.* Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 566 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν 200, 300, 600.

Λύσις. Ὅταν μεριστέος εἶναι 200+300+600 ἤτοι 1100 τὰ μερίδια εἶναι 200, 300, 600· ὅταν ὁ μεριστέος γίνῃ ἑκατοντάκις μικρότερος, καὶ τὰ μερίδια θὰ γίνωσιν ὡσαύτως, δηλ. ὅταν ὁ μεριστέος εἶναι 11, τὰ μερίδια θὰ εἶναι 2, 3 6 κτλ.

Προβλήματα τῆς ἑταιρείας.

279. Τρεῖς ἔμποροι διά τινα ἐπιχείρησιν κατέθεσαν τὰ ἑξῆς κεφάλαια· ὁ πρῶτος 280 λίρ. τουρκ. ὁ δεύτερος 200 καὶ ὁ τρίτος 350, ἐκέρδησαν δὲ 249 λίρ. τουρκ. Πόσον κέρδος ἀναλογεῖ εἰς ἕκαστον;

Λύσις. Ἀφοῦ κεφάλαιον 280+200+350 ἤτοι 850 λίρ. τουρκ. φέρει κέρδος 249 λίρ. τουρκ., κεφάλαιον 1 λίρ. τουρκ. θὰ φέρῃ κέρδος $\frac{249}{830}$ λίρ. τουρκ. καὶ κεφάλαιον 280 λιρ, τουρκ, θὰ φέρῃ κέρδος $\frac{249\times280}{830}=84$ καὶ κεφάλαιον 200 λίρ, τουρκ.. θὰ φέρῃ κέρδος

$\frac{249 \times 200}{830} = 60$, καὶ κεφάλαιον 350 λίρ. τουρκ. θὰ φέρῃ κέρδος $\frac{349 \times 350}{830} = 105$.

Τὸ πρόβλημα τοῦτο λύεται καὶ ὡς ἑξῆς·

Ἐὰν ἐπρόκειτο νὰ μερίσωμεν 830 λίρ. τουρ. θὰ ἐλάμβανεν ὁ α′ 280 λίρ. τουρκ., ὁ β′ 200 καὶ ὁ γ′ 350.

Ἐὰν ἐπρόκειτο νὰ μερίσωμεν 1 λίρ. τουρκ. ὁ α′ $\frac{280}{830}$λ.τ. β′ $\frac{200}{830}$ γ′$\frac{350}{840}$,
» » » ἤτοι $\frac{28}{83}$ $\frac{20}{83}$ $\frac{35}{83}$,
καὶ ἐπειδὴ πρόκειται νὰ μερίσωμεν 249 λίρ. τουρκ. θὰ λάβῃ

$$\frac{28 \times 249}{83}, \qquad \frac{20 \times 249}{83}, \qquad \frac{35 \times 249}{83},$$

ἤτοι ὁ α′ 84, ὁ β′ 60 καὶ ὁ γ′ 105.

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι τὰ τοιαῦτα προβλήματα τῆς ἑταιρείας λύονται, ὅπως ὅλα τὰ προβλήματα τοῦ μερισμοῦ.

Δοκιμή. Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν μερῶν, εἰς τὰ ὁποῖα διῃρέθη ὁ ἀριθμός, πρέπει νὰ ἰσοῦται πρὸς τοῦτον, ἂν αἱ πράξεις εἶναι ἀκριβεῖς.

280. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι

Διὰ νὰ μερίσωμεν ἀριθμόν τινα εἰς μέρη ἀνάλογα πολλῶν δοθέντων ἀριθμῶν, πολλαπλασιάζομεν τὸν μεριστέον χωριστὰ ἐπὶ ἕκαστον τῶν δοθέντων ἀναλόγων, καὶ ἕκαστον γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀναλόγων τούτων.

Δυνάμεθα μάλιστα πάντας τοὺς δοθέντας ἀναλόγους νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἢ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ καὶ ἔπειτα νὰ προβῶμεν εἰς τὴν λύσιν ὡς ἀνωτέρω.

281. *Πρόβλ.* Τρεῖς ἔμποροι ἤρχισαν ὁμοῦ ἐπιχείρησίν τινα· ὁ πρῶτος κατέβαλε 280 λίρ. καὶ ἔμεινε συνέταιρος ἐπὶ 18 μῆνας, ὁ δεύτερος κατέβαλε 200 λίρ. καὶ ἔμεινε μόνον 15 μῆνας, ὁ δὲ τρίτος κατέθεσε 350 καὶ εἰργάσθη 23 μῆνας. Ἐκ τῆς ἐπιχειρήσεως προέκυψε κέρδος 249 λιρ., πόσον θὰ λάβῃ ἕκαστος ἀναλόγως τοῦ κεφαλαίου καὶ τοῦ χρόνου, κατὰ τὸν ὁποῖον εἰργάσθη εἰς τὴν ἑταιρείαν;

Λύσις. Γνωρίζομεν, ὅτι τὸ κεφάλαιον καὶ ὁ χρόνος εἶναι ποσὰ ἀντίστροφα· ὁ πρῶτος λοιπόν, ὅστις κατέθεσε 280 λίρ. ἐπὶ 18 μῆν.

θὰ λάβῃ κέρδος τι. Ἂν ἤθελε νὰ λάβῃ τὸ αὐτὸ κέρδος εἰς 1 μῆνα, ἔπρεπε νὰ καταθέσῃ $280 \times 18 = 5040$ λίρ. καὶ ὁ δεύτερος τὸ κέρδος, τὸ ὁποῖον θὰ λάβῃ ἀπὸ τὰς 200 λίρ. εἰς 15 μῆνας, ἂν ἤθελε νὰ τὸ λάβῃ εἰς 1 μῆνα, ἔπρεπε νὰ καταθέσῃ $200 \times 15 = 3000$ λίρ. καὶ ὁ τρίτος, ὅστις κατέθεσε 350 λίρ. εἰς 23 μῆνας, θὰ λάβῃ κέρδος τι· διὰ νὰ λάβῃ ὅμως τὸ αὐτὸ κέρδος εἰς 1 μῆνα, ἔπρεπε νὰ καταθέσῃ $350 \times 23 = 8050$ λίρ.

Οὕτω τὸ πρόβλημα μετετράπη εἰς τὸ ἑξῆς:

Τρεῖς ἔμποροι διά τινα ἐπιχείρησιν κατέθεσαν, ὁ α′ 5040 λίρ., ὁ β′ 3000 λίρ. καὶ ὁ τρίτος 8050 λίρ. καὶ ἐκέρδησαν 249 λίρ. πόσας θὰ λάβῃ ἕκαστος;

Λύοντες κατὰ τὸ προηγούμενον πρόβλημα εὑρίσκομεν, ὅτι θὰ λάβῃ ὁ α′ $\frac{249 \times 5040}{16090} = 77,99$ λίρ., ὁ β′ $\frac{249 \times 3000}{16090} = 46,43$ λίρ. καὶ ὁ τρίτος $\frac{249 \times 8050}{16090} = 124,58$ λίρ.

Προβλήματα.

1) Τρεῖς ἔμποροι συνεταιρισθέντες κατέθεσαν ὁ α′ 1230 γρόσ., ὁ β′ 5000 γρόσ. καὶ ὁ τρίτος 3250 γρόσ., ἠγόρασαν δὲ 11850 ὀκ. σίτου, τὸν ὁποῖον μετεπώλησαν πρὸς 38 παρ. πόσον ἐκέρδησαν καὶ πόσον θὰ λάβῃ ἕκαστος ἐκ τοῦ κέρδους;

Ἀπ. ἐκέρδησεν 1777,50 γρόσ. τὰ δὲ μερίδια εἶναι
τοῦ α′ 230,62... τοῦ β′ 937,50... τοῦ γ′ 609,37...

2) Τρεῖς χωρικοὶ παρήγαγον 2500 ὀκ. ἐλαίου, ἐμερίσθησαν δὲ αὐτὸ οὕτως, ὥστε, ἐὰν ὁ πρῶτος λαμβάνῃ 2 ὀκ. ὁ δεύτερος λαμβάνει 3 ὀκ. καὶ ὁ τρίτος 5 ὀκ., πόσας ὀκάδας θὰ λάβῃ ἕκαστος;

Ἀπ. ὁ α′ 500 ὀκ. ὁ β′ 750, ὁ γ′ 1250.

Ὁδηγία. Ἐπειδή, ὅταν πρόκηται νὰ μοιράσωσι 10 ὀκ., ὁ πρῶτος θὰ λάβῃ 2 ὀκ., ὁ δεύτερος 3 καὶ ὁ τρίτος 5, εὑρίσκομεν πόσον θὰ λάβῃ ἕκαστος, ὅταν πρόκηται νὰ μοιράσουν μίαν ὀκάν, κτλ.

Προσθήκη. Νὰ τραπῇ τὸ μερίδιον τοῦ πρώτου εἰς χιλιόγραμμα, τοῦ δευτέρου εἰς λαγύνια καὶ τοῦ τρίτου εἰς ἀγιάρια.

3) Δύο ἀδελφοὶ ἠγόρασαν οἰκίαν, καὶ ὁ μὲν εἷς κατέβαλε 2 μέρη τοῦ πληρωθέντος ποσοῦ, ὁ δὲ ἄλλος 3. Ἀπολαμβάνουν δὲ κατὰ μῆνα 30 λίρ.

ἐξοδεύουν ὅμως κατ' ἔτος δι' ἐπισκευάς, φόρους κτλ. 50 λίρ. πόσας λίρας τουρκ. θὰ λαμβάνῃ ἕκαστος ἀδελφὸς κατ' ἔτος;

Ἀπ. ὁ α' 124, ὁ β' 186.

Ὁδηγία. Εὑρίσκομεν τὸ ἐτήσιον εἰσόδημα, ἀφαιροῦμεν τὰ ἔξοδα, τὸ δὲ ὑπόλοιπον θὰ γείνῃ 5 μερίδια κτλ.

Προσθήκη. Νὰ τραπῇ τὸ μερίδιον τοῦ πρώτου ἀδελφοῦ εἰς ρούβλια, τοῦ δὲ δευτέρου εἰς σελίνια.

4) Ἔμπορος χρεωκοπήσας μὲ χρέος 50000 φρ. δύναται νὰ πληρώσῃ εἰς τοὺς δανειστὰς μόνον 20000, χρεωστεῖ δὲ εἰς ἕνα ἔμπορον 8000 φρ., εἰς ἕνα ἐργοστασιάρχην 20000 καὶ εἴς τινα τραπεζίτην τὸ ὑπόλοιπον· πόσον θὰ λάβῃ ἕκαστος, ἐὰν πρῶτον ἀφαιρεθῶσι τὰ δικαστικὰ ἔξοδα, τὰ ὁποῖα ἀνῆλθον εἰς 5 %; Ἀπ. ὁ α' 3040, ὁ β' 7600 καὶ ὁ γ' 8360.

Προσθήκη. Ἐὰν ὁ πρῶτος λάβῃ εἰκοσάφραγκα, πόσον θὰ εἶναι τὸ βάρος αὐτῶν καὶ πόσος ὁ εἰς ταῦτα περιεχόμενος καθαρὸς χρυσός;

Ἀπ. 151 εἰκοσάφρ. ἔχουν βάρος 974,19... γραμμ., καθαρὸν δὲ χρυσὸν 876,77 γραμμ.

5) Τρεῖς ἐργάται ἔλαβον ὁμοῦ ἐργαζόμενοι 1548 γρόσ., ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος εἰργάσθησαν 15 ἡμέρ., ἀλλ' ὁ πρῶτος εἰργάζετο 12 ὥρας καθ' ἑκάστην, ὁ δὲ δεύτερος 9, ὁ τρίτος εἰργάσθη μόνον 9 ἡμέρας ἀνὰ 8 ὥρ. καθ' ἑκάστην· πόσα γρόσ. θὰ λάβῃ ἕκαστος;

Ἀπ. Ὁ α' 720 γρόσ., ὁ β' 540 γρόσ. καὶ ὁ γ' 288 γρόσ.

Ὁδηγία. Θὰ εὕρωμεν πόσας ὥρας εἰργάσθη ἕκαστος καὶ ἀναλόγως τῶν ὡρῶν θὰ μοιρασθῶσι.

Προσθήκη. Νὰ τραπῇ τὸ μερίδιον τοῦ πρώτου εἰς κριμίτσας.

Ἀπ. 12 κριμίτσας καὶ 48 γρόσ.

6) Πατὴρ ἀποθανὼν ἀφῆκε διὰ διαθήκης εἰς τὴν θυγατέρα του τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ μεριδίου τῆς μητρός, καὶ εἰς τὸν υἱόν του $\frac{3}{4}$ τοῦ μεριδίου τῆς θυγατρός. Ἐὰν ἡ περιουσία εἶναι 3900 λίρ. τουρκ. πόσα θὰ λάβῃ ἕκαστος κληρονόμος;

Ἀπ. Θὰ λάβῃ ἡ μήτηρ 1800, ἡ θυγάτηρ 1200 λίρ. καὶ ὁ υἱὸς 900 λίρ.

Ὁδηγία. Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ 1 τὸ μερίδιον τῆς μητρός, τὸ μερίδιον τῆς θυγατρὸς θὰ εἶναι $\frac{2}{3}$, τὸ δὲ μερίδιον τοῦ υἱοῦ θὰ εἶναι $\frac{1}{2}$· θὰ μερισθῶσι λοιπὸν τὴν περιουσίαν εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 1, $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{2}$. Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν τὸ μερίδιον τῆς μητρὸς διὰ τοῦ 6, ὅστις διαιρεῖται καὶ διὰ τοῦ 3 καὶ διὰ τοῦ 2, ἤτοι τῶν παρονομαστῶν τῶν κλασμάτων $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{1}{2}$, καὶ τὸ μὲν μερίδιον τῆς θυγατρὸς θὰ παρίσταται διὰ τοῦ 4, τοῦ δὲ υἱοῦ διὰ 3· οὕτω θὰ ἔχωμεν νὰ μερίσωμεν τὰς 3900 λίρ. εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν 6, 4, 3.

Προσθήκη. Νὰ τραπῇ εἰς φιορίνια τὸ μερίδιον τοῦ υἱοῦ. Τρέπομεν πρῶτον εἰς γρόσια καὶ ἔπειτα εἰς φιορίνια, ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι 95 γρόσια εἶναι 8 φιορίνια. Ἀπ. 8185,27.

7) Δύο συνέταιροι μοιρασθέντες τὰ κέρδη ἐργασίας τινὸς ἔλαβον ὁ μὲν πρῶτος 340 φρ., ὁ δὲ δεύτερος μόνος 560 φρ., ἐὰν ὁ πρῶτος εἶχε καταθέση 1500 φρ. πόσα εἶχεν ὁ δεύτερος; Ἀπ. 2470 φρ.

Προσθήκη. Νὰ τραπῇ τὸ κέρδος τοῦ πρώτου εἰς χρυσᾶ γρόσια.

8) Δύο συνέταιροι μὲ κεφάλαια 500 λίρ. ἐκέρδησαν ἀπό τινα ἐργασίαν 40 λίρ. Ὁ πρῶτος εἶχε καταθέσει 150 λίρ. περισσοτέρας τοῦ β'· πόσα θὰ λάβῃ ἕκαστος; Ἀπ. ὁ α' 26 λίρ., ὁ δὲ β' 14 λίρ.

9) Τρεῖς γεωργοὶ ἠγόρασαν ἀγρόν, καὶ ὁ μὲν β' ἔχει μερίδιον διπλάσιον τοῦ πρώτου, ὁ δὲ τρίτος $\frac{3}{4}$ τοῦ δευτέρου· ἐκέρδησαν δὲ ἐκ τῶν εἰσοδημάτων 18350 γρόσ. πόσα θὰ λάβῃ ἕκαστος;

Ἀπ. ὁ α' 4077,77, ὁ β' 81,5555, ὁ γ' 6116,6.

Ὁδηγία. Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ 1 τὸ μερίδιον τοῦ πρώτου, τοῦ δευτέρου θὰ εἶναι 2 καὶ τοῦ τρίτου $2 \times \frac{3}{4}$ ἤτοι $1\frac{1}{2}$, ὥστε πρόκειται νὰ μοιράσουν τὸ κέρδος εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 1, 2, $1\frac{1}{2}$.

Καὶ εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο ἐὰν παρασταθῇ τὸ μερίδιον τοῦ πρώτου διὰ τοῦ 4, ὅστις διαιρεῖται διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ $\frac{3}{4}$, θὰ ἔχωσι νὰ μερίσωσι τὸν 18350 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν 4,8,6.

Προσθήκη. Νὰ τραπῶσι τὰ μερίδια εἰς γρόσ. χρ.

10) Τρεῖς πιστωταὶ μερίζονται τὴν ἐξ 8500 λιρ. περιουσίαν πτωχεύσαντος ἐμπόρου, ὅστις ἐχρεώστει εἰς τὸν α' πιστωτὴν 4500 λίρ. εἰς τὸν β' 1200 λίρ. καὶ εἰς τὸν γ' 9300 λίρ. πόσα θὰ λάβῃ ἕκαστος καὶ πόσον ἐπὶ τοῖς ἑκατὸν ἀναλογεῖ;

Ἀπ. ὁ πρῶτος 2550, ὁ δεύτερος 680, ὁ τρίτος 5270, ἀναλογεῖ δὲ 56,66 °/o λίρας.

11) Δύο συνέταιροι κατέθεσαν ὁ μὲν 3745 γρόσ. ὁ δὲ 5670, ἐκέρδησαν δὲ ἐκ τῆς ἐπιχειρήσεως 45 °/o πόσον κέρδος θὰ λάβῃ ἕκαστος;

Ἀπ. ὁ α' 1685,25, ὁ β' 2551,50.

12) Ἐὰν τὸ κέρδος, τὸ ὁποῖον προκύπτει ἐξ ἐπιχειρήσεως δύο συνεταί-

ρων εἶναι 35 %, καὶ ὁ πρῶτος λάβῃ μετὰ τὸν διαμερισμὸν κεφάλαιον καὶ κέρδη ὁμοῦ 13500 φρ. τοῦ δὲ δευτέρου τὸ κέρδος εἶναι 7000, πόσα κεφάλαια κατέθεσεν ἕκαστος ;

Ἀπ. κατέθεσεν ὁ πρῶτος 10000 καὶ ὁ δεύτερος 20000.

13) Τρεῖς συνέταιροι ἤνοιξαν κατάστημα καὶ ὁ πρῶτος τούτων κατέθεσε 21600 γρόσ., ὁ δὲ δεύτερος 18360 γρόσ. καὶ ὁ τρίτος, ὅστις εἶναι ἔμπειρος τῆς ἐργασίας, καταθέτει μόνον τὴν συνεργασίαν του, ἥτις ὑπολογίζεται πρὸς 15 λίρας κατὰ μῆνα, μετὰ δύο δὲ ἔτη ἐκέρδισαν 800 λίρας, πόσας ἐκ τούτων θὰ λάβῃ ἕκαστος ;

Ἀπ. Ἐκέρδισαν ὁ α′ 219,17 λίρ. ὁ β′ 186,30 ὁ δὲ γ′ 394,52.

14) Τρεῖς ποιμένες ἐνοικίασαν λιβάδιον ἀντὶ 30 λιρῶν· καὶ ὁ μὲν εἷς ἔθρεψε 80 πρόβατα ἐπὶ 5 μῆνας, ὁ β′ 56 πρόβατα ἐπὶ 4 μῆνας καὶ ὁ τρίτος 50 πρόβατα ἐπὶ 7 μῆνας· πόσα θὰ πληρώσῃ ἕκαστος ἀναλόγως τοῦ ἀριθμοῦ τῶν προβάτων καὶ τοῦ χρόνου, κατὰ τὸν ὁποῖον τὰ ἐβόσκησε ;

Ἀπ. α′ 1283,16 γρόσ. ὁ β′ 834 γρόσ. καὶ ὁ γ′ 1122,78 γρόσ.

Ὁδηγία. Τὰ 80 πρόβατα τοῦ πρώτου εἰς 5 μῆνας θὰ φάγουν τόσον χόρτον, ὅσον $80 \times 5 = 400$ πρόβατα εἰς ἕνα μῆνα κτλ.

15) Τρεῖς συνέταιροι πρὸς ἐπιχείρησίν τινα κατέθεσαν ὁ πρῶτος 965 λίρ. ὁ β′ 850, καὶ ὁ γ′ 780· μετὰ 6 μῆνας ἐχρειάσθησαν ἀκόμη 500 λίρ, τὰς ὁποίας κατέθεσεν ὁ α′, τρεῖς μῆνας δὲ μετὰ ταῦτα ἐχρειάσθησαν καὶ ἄλλαι 450 λίρ. τὰς ὁποίας κατέθεσεν ὁ β′. Εἰς τὸ τέλος τῆς ἐπιχειρήσεως, ἥτις διήρκεσε 3 ἔτη, εὗρον ὅτι ἐκέρδησαν 7000 λίρ. πόσα θὰ λάβῃ ἕκαστος ἀναλόγως τῶν κεφαλαίων του καὶ τοῦ χρόνου.

Ἀπ. Θὰ λάβωσι κέρδος ὁ πρῶτος 2887,78 λίρ. ὁ δεύτερος 2481,96, λίρ. ὁ δὲ τρίτος 1630,26 λίρ.

Ὁδηγία. Ἡ κατάθεσις 965 λίρ. θὰ ὑπηρετήσῃ τὴν ἑταιρείαν 36 μῆνας· ὁμοίως καὶ αἱ 850 λίρ. καὶ αἱ 780, ἡ κατάθεσις ὅμως 500 λίρ. θὰ ὑπηρετήσῃ τὴν ἑταιρείαν 30 μόνον μῆνας καὶ αἱ 450 λίρ. θὰ ὑπηρετήσωσι 27 μῆνας, ὥστε δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν, ὅτι εἶναι πέντε συνέταιροι ἀντιπροσωπευόμενοι διὰ τῶν κεφαλαίων α′ 965 λίρ. εἰς 36 μῆν. β′ 850 λίρ. εἰς 36 μῆν. γ′ 780 λίρ. εἰς 36 μῆν. δ′ 500 λίρ. εἰς 30 μῆν. καὶ ε′ 450 λιρ. εἰς 27 μῆν. τὰ κέρδη τῆς πρώτης καὶ τετάρτης καταθέσεως ἀνήκουν εἰς τὸν πρῶτον, τῆς δὲ δευτέρας καὶ πέμπτης εἰς τὸν δεύτερον.

16) Τὸ μέταλλον ἐκ τοῦ ὁποίου κατασκευάζονται οἱ κώδωνες, εἶναι συγ-

χώνευμα 110 γραμ. κασσιτέρου, 390 γραμ. χαλκοῦ, 5 γραμ. ψευδαργύρου καὶ 4 γραμ. μολύβδου. Πόσον ἐξ ἑκάστου εἴδους πρέπει νὰ συγχωνεύσωμεν διὰ νὰ κατασκευάσωμεν κώδωνα 290 χιλιογράμμων;

'Απ. 62,67 κασσιτέρου, 222,20 χαλκοῦ, 2,86 ψευδ. 2,27 μολ.

17) Πατὴρ ἀποθανὼν ἀφίνει τὴν σύζυγον, δύο υἱοὺς καὶ δύο θυγατέρας, διατάσσει δὲ διὰ διαθήκης, ἵνα αἱ δύο θυγατέρες λάβωσιν ἀπὸ $\frac{1}{3}$ τῆς οἰκίας του ἑκάστη, τὸ δὲ ἕτερον $\frac{1}{3}$ διαμερισθῶσιν ἐξ ἴσου οἱ υἱοὶ μετὰ τὸν θάνατον τῆς μητρός. 'Αλλὰ μετὰ τὸν πατέρα ἀπέθανεν εἷς υἱὸς καὶ μία θυγάτηρ, τὰ δὲ μερίδια αὐτῶν, ἅτινα εἶναι τὸ μὲν τοῦ υἱοῦ $\frac{1}{6}$, τὸ δὲ τῆς θυγατρὸς $\frac{1}{3}$, διεμερίσθησαν κατὰ νόμον ἐξ ἴσου ἡ μήτηρ μετὰ τῶν δύο απομεινάντων τέκνων. Τί μέρος τῆς οἰκίας ἀνήκει ἤδη εἰς τὴν μητέρα, τί εἰς τὸν ἐπιζήσαντα ἀδελφὸν καὶ τί εἰς τὴν ἀδελφήν;

'Απ. $\frac{1}{6}$ εἰς τὴν μητέρα, $\frac{1}{3}$ εἰς τὸν ἀδελφὸν καὶ $\frac{1}{2}$ εἰς τὴν ἀδελφήν.

18) Κατεσκευάσθησαν 1500 φιάλαι κρυστάλλιναι, ἑκάστη τῶν ὁποίων ἔχει βάρος 800 γραμ. Γνωρίζομεν δέ, ὅτι εἰς 100 γραμ. τοῦ κρυστάλλου αὐτῶν περιέχονται 38,7 γραμ. πυριτίου (ἄμμου καθαροῦ), 53,5 γραμ. ὀξειδίου τοῦ μολύβδου καὶ 7,8 γραμ. ποτάσης. Ζητεῖται πόση ἄμμος, πόσον ὀξείδιον τοῦ μολύβδου καὶ πόση πότασα περιέχεται εἰς τὰς 1500 φιάλας;

'Απ. 464,4 χγ. ἄμμου, 642 χγ. ὀξειδίου μολ. 93,6 χγ. ποτάσης.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΗΣ ΜΙΞΕΩΣ

282. Τὰ προβλήματα τῆς μίξεως εἶναι δύο εἰδῶν:

1) Προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται ἡ τιμὴ τῆς μονάδος τοῦ μίγματος ὡρισμένων ποσῶν μὲ ὡρισμένας ἀξίας.

2) Προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται πόσον πρέπει ν' ἀναμίξωμεν ἐξ ἑκάστου τῶν δεδομένων εἰδῶν, διὰ νὰ ἔχῃ ἡ μονὰς τοῦ μίγματος ὡρισμένην ἀξίαν.

Προβλήματα τοῦ 1ου εἴδους.

283. *Πρόβλ.* Παντοπώλης ἀνέμιξε 15 ὀκ. βουτύρου τῶν 7 γροσ. κατ' ὀκὰν καὶ 25 ὀκ. τῶν 17 γροσ. κατ' ὀκὰν μετὰ 12 ὀκ. βουτύρου τῶν 24 γροσ. πόσον ἀξίζει ἡ ὀκὰ τοῦ μίγματος;

Λύσις. Αἱ 15 ὀκ.	πρὸς	7 γρόσ.	ἀξίζουν	$15\times 7=105$	γρόσ.
» 25	»	17	»	$25\times 17=425$	»
» 12	»	24	»	$12\times 24=288$	»

ἑπομένως αἱ 52 ὀκάδες τοῦ κράματος ἀξίζουν 818 γρόσ.
ἄρα ἡ ὀκὰ τοῦ κράματος θ' ἀξίζῃ $\frac{818}{52}=15,73$ γρόσ.

Πρόβλ. Χρυσοχόος συνεχώνευσεν 120 δράμια ἀργύρου, τοῦ ὁποίου ὁ τίτλος ἦτο 0,950, μετὰ 230 δραμ. ἀργύρου ἔχοντος τίτλον 0,800· ποῖος θὰ εἶναι ὁ τίτλος τοῦ συγχωνεύματος;

Λύσις. Ἐπειδὴ τὸ 1 δράμ. ἔχει 0,950 καθαρὸν ἄργυρον, τὰ 120 δράμ. θὰ ἔχωσιν $120\times 0,950=114$ δράμ. ἀργ. καθαροῦ. Ὡσαύτως τὰ 230 δράμ. τίτλου 0,800 θὰ ἔχωσι $230\times 0,800=184$ δράμ. ἀργ. καθαροῦ, ἑπομένως τὰ 350 δράμ. συγχωνεύματος θὰ ἔχωσι 298 δράμ. ἀργ. καθαροῦ, ἄρα τὸ 1 δράμ. συγχωνεύματος θὰ ἔχῃ $\frac{298}{350}=0,751$.

Ὁ τίτλος λοιπὸν τοῦ συγχωνεύματος εἶνε 0,851.

Προβλήματα τοῦ 2ου εἴδους.

285. *Πρόβλ.* Ἔχει τις δύο εἰδῶν οἴνους· τῆς καλῆς ποιότητος ἡ ὀκὰ ἀξίζει 95 παράδες, τῆς δὲ κατωτέρας 55· πόσον πρέπει νὰ λάβῃ ἐξ ἑκάστου εἴδους, διὰ νὰ σχηματίσῃ 100 ὀκάδας κράματος τῶν 80 παράδων;

Λύσις. Τοῦ πρώτου εἴδους ἡ ὀκὰ ἀξίζει 95 παράδες· ἂν πωλήσῃ ταύτην 80 παράδες, θὰ ζημιωθῇ 15 παράδες κατ' ὀκάν.

Τοῦ δευτέρου εἴδους ἡ 1 ὀκὰ ἀξίζει 55 παράδες, ἂν πωλήσῃ ταύτην 80 παράδες, θὰ κερδίσῃ 25 παράδες. Ἂν δὲ λάβῃ ἐκ τοῦ πρώτου εἴδους τόσας ὀκάδας, ὅσους παράδες κερδίζει ἀπὸ 1 ὀκὰν τοῦ δευτέρου εἴδους, ἤτοι 25 ὀκάδας, ἐπειδὴ

Εἰς 1 ὀκ. χάνει 15 παρ. εἰς 25 ὀκ. θὰ χάσῃ $15\times 25=375$ παρ. ἂν δὲ λάβῃ ἐκ τοῦ δευτέρου εἴδους τόσας ὀκάδας, ὅσους παράδες χάνει ἀπὸ 1 ὀκὰν τοῦ πρώτου εἴδους, ἤτοι ἂν λάβῃ 15 ὀκάδες τοῦ πρώτου εἴδους, ἐπειδὴ

Εἰς 1 ὀκὰν κερδίζει 25 παρ , εἰς 15 ὀκάδας θὰ κερδήσῃ $25 \times 15 = 375$ παρ.

Ἑπομένως ἂν συγκεράσῃ 25 ὀκ. τοῦ πρώτου εἴδους μετὰ 65 ὀκ. τοῦ δευτέρου εἴδους καὶ πωλῇ τὸ κρᾶμα 80 παρ. θὰ χάσῃ μὲν ἀπὸ τὰς 25 ὀκ. τοῦ πρώτου εἴδους, ἀλλὰ τὸ αὐτὸ ποσὸν θὰ τὸ κερδήσῃ ἀπὸ τὰς 15 τοῦ δευτέρου εἴδους, ἄρα οὔτε κέρδος θὰ ἔχῃ οὔτε ζημίαν. Τὸ δὲ κρᾶμα θὰ εἶνε $25 + 15 = 40$ ὀκάδες, ὥστε

Διὰ κρᾶμα 40 ὀκ. θὰ λάβῃ 25 ὀκ. 1ου εἴδους καὶ 15 ὀκ. τοῦ 2ου εἴδους ;

Διὰ κρᾶμα 1 ὀκ. θὰ λάβῃ $\frac{25}{40}$ ὀκ. 1ου εἴδους καὶ $\frac{15}{40}$ ὀκ. τοῦ 2ου εἴδους ;

Διὰ κρᾶμα 100 ὀκ. θὰ λάβῃ $\frac{15 \times 100}{40}$ ὀκ. 1ου εἴδους καὶ $\frac{15 \times 100}{40}$ ὀκ. τοῦ 2ου εἴδους ἤτοι $62\frac{1}{2}$ ὀκ. 1ου εἴδους καὶ $37\frac{1}{2}$ ὀκ τοῦ 2ου εἴδους.

Παρατήρησις. Ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν ὀκάδων τοῦ κράματος, τὸ ὁποῖον θὰ σχηματισθῇ, εἶναι ὡρισμένος, ὡς εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι 100, τότε δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν πόσας ὀκάδας θὰ λάβῃ ἐκ τοῦ ἑνὸς εἴδους, οἷον τοῦ 1ου καὶ τὸ ὑπόλοιπον $100 - 62\frac{1}{2} = 37\frac{1}{2}$ ὀκ. θὰ εἶναι ἐκ τοῦ 2ου.

Δοκιμή. Διὰ νὰ δοκιμάσωμεν, ἂν τὸ πρόβλημα ἐλύθη ἄνευ λάθους, εὑρίσκομεν πόση εἶναι ἡ ἀρχικὴ ἀξία ἑκάστου εἴδους καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν πρέπει νὰ ἰσοῦται μὲ τὴν ἀξίαν τοῦ κράματος.

Σημ. Τὰ δεδομένα τῶν τοιούτων προβλημάτων κατατάσσονται ὡς ἑξῆς :

	ἀξίαι	ζημίαι	ὀκ.
1ον εἶδος	90 παρ.	15 παρ.	$15 \times 25 = 375$ ζημία ὁλικὴ
κρᾶμα	80 »		$25 \times 15 = 375$ κέρδος ὁλικὸν
		κέρδος	40 ὀκ.
2ον εἶδος	55 »	25 παρ.	κτλ.

Πρόβλ. Παντοπώλης ἔχει δύο εἰδῶν καφὲ τῶν 18 γροσίων καὶ τῶν 11 γροσ. πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ λάβῃ ἐξ ἑκατέρου εἴδους, διὰ νὰ σχηματίσῃ 28 ὀκ. μίγματος τῶν 15 γροσίων ;

Λύσις. ἀξίαι

α' εἶδος 18 γρόσ. 3 γρόσ. (ζημία κατ' ὀκὰν ἐν τῷ μίγματι).

μῖγμα 15 γρόσ.

β' εἶδος 11 γρόσ. 4 γρόσ. (κέρδος κατ' ὀκὰν ἐν τῷ μίγματι).

'Εὰν λάβῃ 4 ὀκ. ἐκ τοῦ πρώτου, θὰ ζημιωθῇ $4 \times 3 = 12$ γρόσ. ἐν τῷ μίγματι.

'Εὰν λάβῃ 3 ὀκ. ἐκ τοῦ δευτέρου, θὰ κερδήσῃ $3 \times 4 = 12$ γρόσ. ἐν τῷ μίγματι·
ὥστε εἰς $4+3$ὀκ. μίγματος τὸ κέρδος ἰσοῦται πρὸς τὴν ζημίαν ὅθεν

Διὰ 7ὀκ. μίγματος λαμβάνει 4ὀκ. ἐκ τοῦ α' καὶ 3 ὀκ. ἐκ τοῦ β'

διὰ 1 ὀκ. » θὰ λάβῃ $\frac{4}{7}$ » » » $\frac{3}{7}$ ὀκ. »

καὶ διὰ 28 ὀκ. » » » $\frac{4 \times 28}{7}$ ὀκ. » » $\frac{3 \times 28}{7}$ »

ἤτοι θὰ λάβῃ 16 ὀκ. ἐκ τοῦ α' καὶ 12 ὀκ. ἐκ τοῦ β'.

Δοκιμή. Αἱ 16 ὀκ. τοῦ α' εἴδους ἀξίζουν $16 \times 18 = 288$ γρόσ. αἱ δὲ 12 ὀκ. τοῦ β' εἴδους ἀξίζουν $12 \times 11 = 132$ γρόσ. ἑπομένως $16+12$ ὀκ. ἀξίζουν $288+132=420$· ἀλλὰ καὶ αἱ 28 ὀκ. τοῦ μίγματος ἀξίζουν $28 \times 15 = 420$ γρόσ.

Πρόβλ. Ἔχει τις ἄλευρα τεσσάρων εἰδῶν· τοῦ α' ἀξίζει 66 παρ. ἡ ὀκά, τοῦ β' 70 παρ. τοῦ γ' 45 παρ. καὶ τοῦ δ' 53· πόσον πρέπει νὰ λάβῃ ἐξ ἑκάστου εἴδους, διὰ νὰ σχηματίσῃ 95 ὀκ. μίγματος 60 παράδων.

α' εἶδος 60 παρ. 6 παρ. ζημία (κατ' ὀκὰν ἐν τῷ μίγματι)

β' εἶδος 70 παρ. 10 παρ. » » »

μῖγμα 60

γ' εἶδος 53 παρ. 7 παρ. κέρδος (κατ' ὀκὰν ἐν τῷ μίγματι)

δ' εἶδος 45 παρ. 15 » » » »

Πρὸς εὕρεσιν τῶν ζητουμένων σχηματίζει ἓν μῖγμα ἐκ τῶν εἰδῶν τῶν ἐχόντων ἀνωτέραν ἀξίαν τοῦ ζητουμένου μίγματος καὶ ἄλλο ἓν μῖγμα ἐκ τῶν εἰδῶν τῶν ἐχόντων κατωτέραν ἀξίαν τοῦ μίγματος. Τοῦτο δύναται νὰ γίνῃ κατὰ πλείστους τρόπους. Εἷς τούτων εἶναι ὁ ἑξῆς·

Λαμβάνει τόσας ὀκάδας ἐκ τοῦ α΄ εἴδους, ὅσας καὶ ἐκ τοῦ δευτέρου, καὶ σχηματίζει μῖγμα, τὸ ὁποῖον ἂν πωλήσῃ 60 παρ. θὰ χάσῃ 6 παρ. κατ' ὀκὰν ἐκ τοῦ α΄ εἴδους καὶ 10 ἐκ τοῦ δευτέρου, ἤτοι 16 παρ. διὰ 2 ὀκ., ἄρα ἐξ ἑκάστης ὀκᾶς τοῦ μίγματος τούτου θὰ χάνῃ 8 παρ.

Μετὰ ταῦτα λαμβάνομεν ἴσας ὀκάδας ἐκ τῶν δύο εἰδῶν τῆς κατωτέρας ποιότητος καὶ σχηματίζομεν δεύτερον μῖγμα. Εὑρίσκομεν δέ, ὡς ἀνωτέρω, ὅτι ἐξ ἑκάστης ὀκᾶς τούτου θὰ κερδίζῃ 11 παρ. Ἐκ τῶν δύο τούτων μιγμάτων σχηματίζει τὸ ζητούμενον· καὶ ἂν μὲν λάβῃ ἐκ τοῦ πρώτου μίγματος 11 ὀκάδες θὰ χάσῃ $8 \times 11 = 88$ παρ., ἂν δὲ λάβῃ ἐκ τοῦ β΄ 8 ὀκάδες θὰ κερδήσῃ $11 \times 8 = 88$ παρ. ὥστε, ἂν σχηματίσῃ 19 ὀκ. μίγματος μὲ 11 ὀκ. ἐκ τοῦ πρώτου μίγματος καὶ 8 ὀκ. ἐκ τοῦ δευτέρου, οὔτε κέρδος θὰ ἔχῃ οὔτε ζημίαν· λοιπὸν

διὰ μῖγμα 19 ὀκ. θὰ λάβῃ 11 ὀκ. ἐκ τοῦ α΄ καὶ 8 ὀκ. ἐκ τοῦ β΄
» 1 ὀκᾶς » $\frac{11}{19}$ » » » καὶ $\frac{8}{19}$ » » »
καὶ διὰ μῖγμα 95 ὀκ. θὰ λάβῃ $\frac{11 \times 95}{19}$ » » » $\frac{8 \times 95}{19}$ » »

ἤτοι 55 ὀκ. ἐκ τοῦ πρώτου μίγματος, ὅπερ περιέχει $22\frac{1}{2}$ ὀκ. τοῦ α΄ ἀλεύρου καὶ $22\frac{1}{2}$ ὀκ. ἐκ τοῦ β΄ καὶ 40 ὀκ. ἐκ τοῦ β΄ μίγματος, ὅπερ περιέχει 20 ὀκ. ἐκ τοῦ γ΄ ἀλεύρου, καὶ 20 ὀκ. ἐκ τοῦ δ΄.

Πρόβλ. Θέλει τις νὰ ἀναμίξῃ 75 ὀκ. σίτου τῶν 37 παράδων μετὰ 53 ὀκ. ἄλλης ἀξίας. Πόση πρέπει νὰ εἶναι αὕτη, ὅπως ἡ ὀκὰ τοῦ μίγματος ἀξίζῃ 33 παρ.;

Λύσις. Εὑρίσκομνν τὴν ὁλικὴν ἀξίαν τοῦ μίγματος, ἥτις ἀποτελεῖται ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῆς ἀξίας τοῦ πρώτου καὶ τοῦ δευτέρου εἴδους. Ἐὰν ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τούτου ἀφαιρέσωμεν τὴν ἀξίαν τοῦ πρώτου εἴδους, τὸ ὑπόλοιπον εἶναι ἡ ἀξία τοῦ δευτέρου εἴδους, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν πόσον ἀξίζει ἡ ὀκὰ τούτου.

Αἱ $75 + 53$ ἤτοι
αἱ 128 ὀκ. μίγμ. πρὸς 33 παρ. ἀξίζουν $128 \times 33 = 4224$ παρ.
αἱ 75 ὀκ. πρὸς 37 παρ. ἀξίζουν $75 \times 37 = 2775$.

"Αρα αἱ 53 ὀκ., αἵτινες εἶναι τοῦ β' εἴδους, ἀξίζουν 1449 παρ. καὶ ἡ ὀκᾶ θὰ ἀξίζῃ $\frac{1449}{53}=27,33$ παρ.

Πρόβλ. Ἔχει τις τριῶν εἰδῶν οἴνους· 500 ὀκ. τῶν 105 παρ., 280 ὀκ τῶν 80 παρ. καὶ 370 ὀκ. τοῦ ὁποίου τὴν ἀξίαν τῆς ὀκᾶς ἀγνοοῦμεν. Συνεκέρασε τὰ τρία ταῦτα εἴδη καὶ ἡ ὀκᾶ τοῦ κράματος ἀξίζει 90 παρ., πόσον ἤξιζεν ἡ ὀκᾶ τοῦ τρίτου εἴδους ;

Λύσις. Ἂν ἐσχημάτιζε τὸ πρῶτον κρᾶμα τῶν δύο γνωστῶν ποιοτήτων, τοῦτο θὰ εἶναι 780 ὀκ. καὶ θὰ ἀξίζῃ 74900 παρ., ἑπομένως ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 96 παράδες. Τὸ πρόβλημα ἤδη μετετράπη εἰς τὸ ἑξῆς :

Ἔχει τις 780 ὀκ. οἴνου τῶν 96 παρ. καὶ 370 ὀκ. ἄλλης ἀξίας. Ἐὰν ἀναμίξῃ τὰ δύο ταῦτα εἴδη καὶ ἡ ὀκᾶ τοῦ κράματος ἀξίζῃ 90 παρ., πόσον ἀξίζει ἡ ὀκᾶ τοῦ δευτέρου εἴδους ;

Τὸ πρόβλημα τοῦτο λύεται, ὅπως τὸ προηγούμενον, εὑρίσκομεν δέ, ὅτι ἡ ὀκᾶ τιμᾶται 77,29 παρ.

Πρόβλημα. Θέλει τις ν' ἀναμίξῃ 55 ὀκ. ὀρύζης τῶν 130 παρ. μὲ ποσότητά τινα τῶν 75 παράδων, ὥστε νὰ σχηματίσῃ μῖγμα 90 παρ. Πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ λάβῃ ἐκ τοῦ εἴδους τούτου ;

Λύσις. Εὑρίσκομεν πρῶτον πόσον θὰ ζημιωθῇ ἐκ τῆς ἀνωτέρας ποιότητος, τὴν ὁποίαν θὰ πωλῇ εὐθηνότερον. Ἔπειτα, ἐπειδὴ ἐκ τῆς κατωτέρας ποιότητος ἔχει κέρδος 90—75 ἤτοι 15 παρ., θὰ λάβῃ τόσας ὀκάδας, ὅσαι ἀπαιτοῦνται διὰ νὰ καλύψῃ τὴν ζημίαν.

Τὸ πρῶτον εἶδος τῶν 130 παρ., τὸ ὁποῖον ἐν τῷ μίγματι θὰ πωλῆται πρὸς 90 παρ., θὰ φέρῃ ζημίαν 40 παρ. τὴν ὀκάν, ἑπομένως ἡ ὁλικὴ ζημία θὰ εἶναι 2 200 παρ. Τόσα λοιπὸν πρέπει νὰ κερδήσῃ ἐκ τοῦ δευτέρου εἴδους· ἐπειδὴ δὲ

15 παρ. κερδίζει ἀπὸ 1 ὀκ.
1 παρᾶν » » $\frac{1}{15}$ »
καὶ 2200 παρ. θὰ κερδήσῃ » $\frac{2200}{15}=146$ ὀκ. 266 δράμ.

Προβλήματα.

1) Ἀνέμιξέ τις ἄλευρα τριῶν εἰδῶν, 50 ὀκ. τῶν 3 γροσ., 30 ὀκ. τῶν 95 παρ. καὶ 20 ὀκ. τῶν 2 γροσ. πόσον θὰ ἀξίζῃ ἡ ὀκὰ τοῦ μίγματος;

Ἀπ. 104 $\frac{1}{2}$ παρ.

2) Οἰνοπώλης συνεκέρασε δύο εἰδῶν οἶνον, 30 ὀκ. τῶν 2 γροσ. μετὰ 12 ὀκ. τῶν 4,50 γροσ. πόσον ἀξίζει ἡ ὀκὰ τοῦ κράματος;

Ἀπ. 2 γρόσ. καὶ 28 παρ.

3) Καφεπώλης ἀνέμιξε 1,50 ὀκ. καφὲν τῶν 9 γροσ. μετὰ μιᾶς ὀκ. σίτου τοῦ 1 γροσ. πόσον ἀξίζει ἡ ὀκὰ τοῦ μίγματος; Ἀπ. 5 γρόσ. 32 παρ.

4) Γαλακτοπώλης συνεκέρασε 30 ὀκ. γάλακτος τῶν 2 γροσ. μετὰ 12 ὀκ ὕδατος· πόσον ἀξίζει ἡ ὀκὰ τοῦ κράματος; Ἀπ. 1 γρόσ. 17 παρ.

5) Ἐὰν ὁ αὐτὸς γαλακτοπώλης πωλῇ τὸ γάλα πάλιν πρὸς 2 γρόσια, πόσον ἐπὶ τοῖς ἑκατὸν κερδίζει; Ἀπ. 40 %.

6) Ἐὰν συγχωνεύσωμεν 150 γραμμ. ἀργύρου τίτλου 0,930 καὶ ἄλλα 80 γραμμ. τίτλου 0,835, ποῖος θὰ εἶναι ὁ τίτλος τοῦ συγχωνεύματος;

Ἀπ. 0,897·

7) Οἰνοπώλης ἔχει 300 ὀκ. οἴνου τῶν 3 γροσ. συνεκέρασε δὲ αὐτὸν μετὰ 50 ὀκ. ὕδατος· πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὴν ὀκάν, διὰ νὰ λάβῃ τὰ αὐτὰ χρήματα ἐξ ὅλου τοῦ κράματος; Ἀπ. 2 γρόσ. καὶ 23 παρ.

8) Οἰνοπώλης ἔχων 500 ὀκ. οἴνου τῶν 2 γροσ. μετὰ πόσου ὕδατος πρέπει νὰ τὸν συγκεράσῃ διὰ νὰ πωλήσῃ τὸ κρᾶμα 70 παρ.; Ἀπ. 71 ὀκ. 171 δρ.

Ὁδηγία. Θὰ εὕρωμεν πόση εἶναι ἡ ἀξία τοῦ οἴνου καὶ ἔπειτα πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ πωλήσῃ πρὸς 70 παρ. διὰ νὰ λάβῃ τὰ αὐτὰ χρήματα. Ἀφαιροῦντες τὰς 500 ὀκ. τοῦ οἴνου εὑρίσκομεν πόσον ὕδωρ πρέπει νὰ προστεθῇ.

9) Ἔμπορος ἔχει ἔλαιον τῶν 7 γροσ. καὶ 10 παρ. καὶ ἔλαιον τῶν 4 γρ. καὶ 30 παρ. πόσον πρέπει νὰ λάβῃ ἐξ ἑκάστου εἴδους, ὅπως σχηματίσῃ κρᾶμα τῶν 6 γροσίων;

Ἀπ. Τὸ ἴδιον ποσὸν θὰ λάβῃ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ποιοτήτων.

10) Σιτέμπορος ἔχει σῖτον τῶν 37 παρ. καὶ ἕτερον τῶν 48 παρ. πόσας ὀκάδας ἐκ τοῦ πρώτου πρέπει νὰ ἀναμίξῃ μετὰ 500 ὀκ. ἐκ τοῦ δευτέρου. διὰ νὰ ἔχῃ τὸ μῖγμα ἀξίαν 45 παράδων; Ἀπ. 187,50 ὀκ.

Ὁδηγία. Εὑρίσκομεν πόσον θὰ ζημιωθῇ τὸ ὅλον ἐκ τοῦ εἴδους τῶν 48 παράδων, τὸ ὁποῖον θὰ πωλῇ 45 παρ. καὶ ἔπειτα τὰ αὐτὰ χρήματα ἐκ πόσων ὀκάδων τοῦ εἴδους τῶν 37 παράδων θὰ ὠφεληθῇ.

11) Παντοπώλης ἀνέμιξε 80 ὀκ. βουτύρου τῶν 16 γροσ. μετὰ 140 ὀκ. κατωτέρας ἀξίας, πωλεῖ δὲ τὸ μῖγμα 13 γρόσ. τὴν ὀκάν· πόσης ἀξίας εἶναι τὸ δεύτερον εἶδος; Ἀπ. 11,30 γρόσ.

Ὁδηγία. Εὑρίσκομεν τὴν ἀξίαν τοῦ ὅλου μίγματος καὶ τὴν ἀξίαν τοῦ εἴδους τῶν 16 γροσ. ἡ διαφορὰ εἶναι ἡ ὁλικὴ ἀξία τῶν 140 ὀκ. κτλ.

12) Ἔχει τις τριῶν εἰδῶν ἄλευρα, 200 ὀκ. τῶν 85 παρ. 280 ὀκ. τῶν 65 παρ. καὶ 150 τῶν 90 παρ. Ἐὰν ἀναμίξῃ τὰ τρία ταῦτα εἴδη καὶ θέλῃ νὰ κερδήσῃ ἐκ τοῦ μίγματος 15 %, πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὴν ὀκάν;

Ἀπ. 89 παρ. περίπου.

Ὁδηγία. Εἰς τὴν ὁλικὴν ἀξίαν προσθέτομεν καὶ τὸ 15 % καὶ ἔπειτα εὑρίσκομεν τὴν ἀξίαν τῆς ὀκᾶς.

13) Πόσα γραμμάρια χαλκοῦ πρέπει νὰ συγχωνεύσωμεν μετὰ 275 γραμμ. καθαροῦ ἀργύρου, διὰ νὰ ἐπιτύχωμεν συγχώνευμα μὲ τίτλον 0,835;

Ἀπ. 45,375 γραμμ.

Ὁδηγία. Εἰς 0,835 γραμμ. καθαροῦ ἀργύρου θὰ προσθέσωμεν 0,165 γραμμ. χαλκοῦ καὶ θὰ ἔχωμεν οὕτως, 1 γραμμ. συγχωνεύματος κτλ.

14) Συνεχώνευσαν 1835 γραμμάρια ἀργύρου μετὰ 45 γραμμ. χαλκοῦ· ποῖος εἶναι ὁ τίτλος τοῦ συγχωνεύματος; Ἀπ. 0,976.

Ὁδηγία. Ἐπειδὴ εἰς 1880 γραμμάρια μίγματος θὰ περιέχωνται 1835 γραμμ. ἀργύρου ἐκ τούτων εὐκόλως εὑρίσκεται ὁ τίτλος.

15) Πόσον χαλκὸν πρέπει νὰ συγχωνεύσωμεν μετὰ 135 γραμμ. χρυσοῦ τίτλου 0,900, διὰ νὰ σχηματίσωμεν συγχώνευμα τίτλου 0,720;

Λύσις. Εὑρίσκομεν πρῶτον, ὅτι εἰς τὰ 135 γραμμ. τοῦ δοθέντος συγχωνεύματος περιέχονται 121,50 γραμμ. καθαροῦ χρυσοῦ καὶ 13,50 γραμμ. χαλκοῦ. Ἔπειτα σκεπτόμεθα οὕτω· μὲ 0,720 γραμμ. καθαροῦ χρυσοῦ καὶ 0,280 γραμμ. χαλκοῦ κατασκευάζομεν 1 γραμμ. τοῦ νέου συγχωνεύματος, ὥστε μὲ 121,5 γραμμ. καθαροῦ χρυσοῦ καὶ $\frac{28 \times 121{,}5}{72} = 47{,}25$ γραμμ. χαλκοῦ κατασκευάζομεν $\frac{12150}{72} = 168{,}75$ γραμμ. συγχωνεύματος. Ἐπειδὴ δὲ ἐν τῷ δοθέντι συγχωνεύματι ὑπάρχουν 13,50 γραμμ. χαλκοῦ, θὰ προσθέσωμεν καὶ $47{,}25 - 13{,}50 = 33{,}75$ γραμμ. χαλκοῦ καὶ θὰ ἔχωμεν πράγματι

$135 + 33{,}75 = 168{,}75$ γραμμ συγχωνεύματος.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΠΕΡΙ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΚΥΒΙΚΗΣ ΡΙΖΗΣ

Δύναμις ἐν τῇ ἀριθμητικῇ λέγεται τὸ γινόμενον πολλῶν ἴσων παραγόντων, οἷον τὸ γινόμενον $5\times5\times5$ λέγεται δύναμις τοῦ 5 καὶ γράφεται συντόμως 5^3. Τὸ γινόμενον $7\times7\times7\times7\times7$ εἶναι δύναμις τοῦ 7 καὶ γράφεται συντόμως 7^5.

Ἐὰν οἱ παράγοντες εἶναι δύο, τότε ἡ δύναμις λέγεται δευτέρα δύναμις ἢ τετράγωνον τοῦ παράγοντος· κατὰ ταῦτα τὸ 6^2, ἤτοι ὁ 36, εἶναι τετράγωνον τοῦ 6, τὸ 3^2 ἤτοι ὁ 9 εἶναι τετράγωνον τοῦ 3.

Ἐὰν οἱ παράγοντες εἶναι τρεῖς, τότε ἡ δύναμις λέγεται τρίτη δύναμις ἢ κύβος τοῦ παράγοντος· οὕτω τὸ $2^3=8$ εἶναι κύβος τοῦ 2, τὸ $3^3=27$ εἶναι κύβος τοῦ 3.

Ἂν οἱ ἴσοι παράγοντες εἶναι τέσσαρες, τὸ γινόμενον λέγεται τετάρτη δύναμις, ἂν εἶναι πέντε, λέγεται πέμπτη δύναμις.

Τετραγωνικὴ ρίζα ἀριθμοῦ τινος λέγεται δεύτερος ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τετράγωνον εἶναι ὁ πρῶτος. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον τοῦ 36 τετραγωνικὴ ρίζα εἶναι ὁ 6, τοῦ δὲ 81 ὁ 9 κτλ.

Κυβικὴ ρίζα ἀριθμοῦ τινος λέγεται δεύτερος ἀριθμός, τοῦ ὁποίου κύβος εἶναι ὁ πρῶτος· π. χ. τοῦ 27 κυβικὴ ρίζα εἶναι ὁ 3 καὶ τοῦ 8 ὁ 2.

Ὅπως εἰς τὴν διαίρεσιν τῶν ἀκεραίων ὑπάρχουσιν ἀριθμοί, οἵτινες διαιροῦνται ἀκριβῶς δι' ἄλλων (διαίρεσις τελεία), καὶ ἄλλοι μὴ τοιοῦτοι (διαίρεσις ἀτελής), οὕτως ὑπάρχουσι καὶ ἀριθμοί, οἵτινες ἔχουσι τετραγωνικὴν ρίζαν καὶ λέγονται τέλεια τετράγωνα, οἷον ὁ 25, ὁ 36, ὁ 49, καὶ ἄλλοι μὴ τοιοῦτοι καὶ λέγονται μὴ τέλεια τετράγωνα, οἷον ὁ 27, ὁ 45, ὁ 38 κτλ. Τῶν τοιούτων τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν λαμβάνομεν κατὰ προσέγγισιν.

Τὰ αὐτὰ ἰσχύουσι καὶ διὰ τὴν κυβικὴν ρίζαν.

Τετραγωνικὴν ρίζαν κατὰ προσέγγισιν μονάδος λέγομεν τὸν μέγιστον ἀκέραιον, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον περιέχεται εἰς τὸν δοθέντα, οἷον τοῦ 27 τετραγωνικὴ ρίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι ὁ 5· διότι οὗτος εἶναι ὁ μέγιστος ἀκέραιος, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον 25 περιέχεται εἰς τὸν 27. Τοῦ κατὰ μονάδα μεγαλειτέρου ἀριθμοῦ 6 τὸ τετράγωνον εἶναι 36 καὶ δὲν περιέχεται εἰς τὸν 27. Ὁμοίως τοῦ 90 τετραγωνικὴ ρίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι ὁ 9, καὶ τοῦ 75 ὁ 8.

Κυβικὴ ρίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος λέγεται ὁ μέγιστος ἀκέραιος, τοῦ ὁποίου ὁ κύβος περιέχεται εἰς τὸν δοθέντα. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον κυβικὴ ρίζα τοῦ 11 εἶναι ὁ 2, τοῦ δὲ 35 ὁ 3 κτλ.

Ὅταν πρόκηται νὰ σημειώσωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν ἀριθμοῦ τινος, γράφομεν αὐτὸν ὑπὸ τὸ σύμβολον $\sqrt{}$ π. χ. $\sqrt{5}$ σημαίνει τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ 5.

Τὴν κυβικὴν ρίζαν ἀριθμοῦ τινος, οἷον τοῦ 8, σημειοῦμεν γράφοντες τὸν ἀριθμὸν ὑπὸ τὸ σύμβολον $\sqrt[3]{}$· οὕτω $\sqrt[3]{8}$ σημαίνει τὴν κυβικὴν ρίζαν τοῦ 8.

ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΗΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΙΖΗΣ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ὅταν ὁ ἀριθμὸς εἶναι μικρότερος τοῦ 100, εὐκόλως εὑρίσκομεν τὴν τετραγωνικὴν αὐτοῦ ρίζαν διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Οὕτως εὑρίσκεται, ὅτι τῶν ἀριθμῶν

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100

αἱ τετραγωνικαὶ ρίζαι εἶναι

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Ὅταν ὁ ἀριθμὸς εἶναι μέγας, ὡς ὁ 8522432, τότε ἡ τετραγωνικὴ αὐτοῦ ρίζα εὑρίσκεται ὡς ἑξῆς:

Χωρίζομεν τὸν ἀριθμὸν εἰς διψήφια τμήματα ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν (οὕτως 8.56.74.32.). Εὑρίσκομεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ πρώτου πρὸς τ' ἀριστερὰ τμήματος, ὅπερ δύναται νὰ εἶναι μονοψήφιον ἢ διψήφιον (ἐνταῦθα εἶναι 8, ἡ δὲ τετραγωνικὴ ρίζα αὐτοῦ εἶναι 2)· τὸν εὑρεθέντα ἀριθμόν, ὅστις εἶναι τὸ πρῶτον ψηφίον τῆς ζητουμένης ρίζης, ἀφοῦ γράψωμεν δεξιὰ τοῦ δοθέντος, ὑψοῦμεν εἰς τὸ τετράγωνον καὶ τοῦτο ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ πρώτου τμήματος ($8-2^2=8-4=4$). Δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου καταβιβάζομεν τὸ δεύτερον διψήφιον τμῆμα (τὸ 52) καὶ χωρίζομεν δεξιὰ τοῦ προκύπτοντος ἀριθμοῦ

```
8. 52. 24. 32   | 2820
4               |------------------
-----           |  49 | 562 | 564
452             |   9 |   2 |
441             |-----|-----|-----
-------         | 441 |1124 |
  1124          |
  1124          |
---------
  000.32
```

ἓν ψηφίον (ἐκ τοῦ 452 χωρίζομεν τὸν 2, μένει δὲ ὁ 45). Τὸν πρὸς τ' ἀριστερὰ τοῦ χωρισθέντος ψηφίου ἀριθμὸν διαιροῦμεν διὰ τοῦ διπλασίου τῆς εὑρεθείσης τετραγωνικῆς ρίζης (ὁ 45 διὰ 4 δίδει 11). Τὸ πηλίκον, ἂν εἶναι μονοψήφιον, δυνατὸν νὰ εἶναι τὸ δεύτερον ψηφίον τῆς ζητουμένης τετραγωνικῆς ρίζης. Ἵνα δοκιμάσωμεν τοῦτο, γράφομεν δεξιὰ τοῦ διπλασίου τοῦ πρώτου ψηφίου καὶ τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸ αὐτὸ πηλίκον. Ἂν τὸ πηλίκον εἶναι διψήφιος ἀριθμὸς (ὅπως ἐνταῦθα), τότε ἀρχίζομεν τὰς δοκιμὰς ἀπὸ τοῦ 9 καὶ τὸ γινόμενον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ, τοῦ ὁποίου τὰς δεκάδας διῃρέσαμεν, καὶ ἂν ἀφαιρῆται, τότε τὸ δοκιμαζόμενον ψηφίον εἶναι δεύτερον ψηφίον τῆς ρίζης.

Ἂν ὅμως τὸ γινόμενον δὲν ἀφαιρῆται, τότε ἀντὶ τοῦ πηλίκου δοκιμάζομεν τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον ψηφίον καὶ ἐν ἀνάγκῃ ἐξακολουθοῦμεν οὕτω, μέχρις ὅτου εὕρωμεν γινόμενον, τὸ ὁποῖον νὰ ἀφαιρῆται, καὶ τότε γράφομεν τὸ δοκιμαζόμενον ψηφίον δεξιὰ τοῦ πρώτου ψηφίου τῆς ρίζης (ἐνταῦθα διαφορὰν εὑρίσκομεν $452-441=11$, δεύτερον δὲ ψηφίον τῆς ρίζης 8).

Δεξιὰ τῆς εὑρεθείσης διαφορᾶς καταβιβάζομεν καὶ τὸ ἀκόλουθον διψήφιον τμῆμα τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ, τοῦ δὲ οὕτω προκύπτοντος χωρίζομεν δεξιὰ ἓν ψηφίον, τὸ δὲ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμῆμα (ἐνταῦθα τὸ 112) διαιροῦμεν ὡς ἀνωτέρω διὰ τοῦ διπλασίου τῆς εὑρεθείσης τετραγωνικῆς ρίζης (ὅπερ ἐνταῦθα εἶναι $28\times2=56$). Ἂν τὸ πηλίκον εἶναι μονοψήφιον, (ἢ τὸν 9 ἂν τὸ πηλίκον εἶναι διψήφιον) ἵνα δοκιμάσωμεν ἂν εἶναι ψηφίον τῆς ρίζης, γράφομεν δεξιὰ τοῦ εὑρεθέντος διπλασίου καὶ τὸν οὕτως προκύπτοντα ἀριθμὸν (ἐνταῦθα προκύπτει ὁ 562) πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸ αὐτὸ ψηφίον. Ἂν τὸ γινόμενον ἀφαιρῆται ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ, τοῦ ὁποίου τὰς δεκάδας διῃρέσαμεν, τότε τὸ δοκιμαζόμενον ψηφίον εἶναι τὸ τρίτον ψηφίον τῆς ρίζης, τὸ ὁποῖον γράφομεν δεξιὰ τῶν δύο πρώτων (οὕτως ἐνταῦθα θὰ ἔχωμεν 282).

Δεξιὰ τῆς διαφορᾶς καταβιβάζομεν καὶ τὸ ἀκόλουθον διψήφιον τμῆμα καὶ ἐξακολουθοῦμεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον μέχρις ὅτου λάβωμεν ὅλα τὰ ψηφία τῆς ρίζης.

Παρατήρησις. Ἂν πηλίκον τι εἴς τινα τῶν ἀνωτέρω διαιρέσεων εἶναι 0, γράφομεν τοῦτο δεξιὰ τῶν εὑρεθέντων ψηφίων τῆς ρίζης καὶ καταβιβάζομεν τὸ ἑπόμενον διψήφιον τμῆμα τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ καὶ ἐξακολουθοῦμεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον.

Εὕρεσις τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ.

Ἂν πρόκηται νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ, γράφομεν κατόπιν αὐτοῦ ἐν ἀνάγκῃ ἓν μηδενικόν, ἵνα ἔχῃ ἄρτιον ἀριθμὸν

Διάταξις τῶν πράξεων

35,76.05	598	
25	109	1188
107.6	9	8
981	981	9594
950.4		
950.4		
0		

δεκαδικῶν ψηφίων, καὶ ἐξάγομεν, ὅπως ἀνωτέρω τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν. Ταύτης τὰ μὲν ψηφία τὰ προερχόμενα ἐκ τοῦ ἀκεραίου μέρους θὰ εἶναι ἀκέραια, τὰ δὲ ἐκ τοῦ δεκαδικοῦ δεκαδικά· π. χ. τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 35,7604 ἤτοι $\sqrt{357604}$ εἶναι ὁ 5,98.

Τετραγωνικὴ ρίζα τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν

Ἂν ἔχωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν κλασματικοῦ τινος ἀριθμοῦ, τρέπομεν αὐτὸν εἰς δεκαδικὸν καὶ πράττομεν ὡς ἀνωτέρω.

Τετραγωνικὴ ρίζα ἀκεραίου ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν δεκαδικῆς τινος μονάδος.

Ἂν θέλωμεν ἀκεραίου τινὸς ἀριθμοῦ νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν μὲ ὡρισμένον ἀριθμὸν δεκαδικῶν ψηφίων, γράφομεν κατόπιν τοῦ ἀκεραίου ὡς δεκαδικά, διπλάσιον ἀριθμὸν μηδενικῶν ἢ ὅσα εἶναι τὰ ὁριζόμενα δεκαδικὰ ψηφία τῆς ρίζης καὶ ἔπειτα πράττομεν ὡς ἀνωτέρω.

Διάταξις τῶν πράξεων

8,00.00	2,82	
4	48	562
400	8	2
384	384	1134
160.0		
1134		

Ἡ τοιαύτη ρίζα λέγεται κατὰ προσέγγισιν μιᾶς μονάδος τῆς τελευταίας δεκαδικῆς τάξεως τῆς ρίζης· π. χ. $\sqrt{8}$ κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς ἑκατοστοῦ εἶναι 2,82.

Δοκιμή. Ἵνα δοκιμάσωμεν, ἂν ἡ εὑρεθεῖσα ρίζα εἶναι ἡ ἀκριβής, ὑψοῦμεν αὐτὴν εἰς τὸ τετράγωνον καὶ εἰς τοῦτο προσθέτομεν καὶ τὸ ὑπόλοιπον, ὅτε πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸν δοθέντα ἀριθμόν.

ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΗΣ ΚΥΒΙΚΗΣ ΡΙΖΗΣ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ἵνα εὐκολυνώμεθα εἰς τὴν εὕρεσιν τῆς κυβικῆς ρίζης τῶν ἀριθμῶν, πρέπει νὰ γνωρίζωμεν τὰς κυβικὰς ρίζας τῶν τελείων κύβων μέχρι τοῦ 1000. οὕτω οἱ ἀριθμοὶ

1 8 27 64 125 216 343 512 279 1000

ἔχουσι κυβικὰς ρίζας

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

διότι τούτων ὑψούμενος ἕκαστος εἰς τὸν κύβον δίδει τὸν ὑπεράνω αὐτοῦ.

Ἔστω ἤδη πρὸς εὕρεσιν ἡ κυβικὴ ρίζα τοῦ 1 0 5 0 6 4 5 7.

10.506.457	219	
8	$2^2 \times 2 = 12$	$21^2 = 441$
25	$21^2 \times 3 = 1323$	$21^3 = 9261$
10506		
9261		
12454		
10506458		
10505649		
00000807		

Χωρίζομεν πρῶτον τὸν ἀριθμὸν εἰς τριψήφια τμήματα ἀρχίζοντες ἐκ δεξιῶν. Εὑρίσκομεν τὴν κυβικὴν ρίζαν τοῦ πρώτου πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμήματος, ὅπερ δύναται νὰ εἶναι τριψήφιον ἢ διψήφιον ἢ καὶ μονοψήφιον. Ἔπειτα εὑρίσκομεν τὴν κυβικὴν ρίζαν τοῦ πρώτου πρὸς τ' ἀριστερὰ τμήματος (ἡ κυβικὴ ρίζα τοῦ 10 εἶναι 2)· ὑψοῦμεν ταύτην εἰς τὸν κῦβον καὶ τοῦτον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ πρώτου τμήματος (ἐνταῦθα ἡ διαφορὰ εἶναι 10—8=2).

Δεξιὰ τῆς εὑρεθείσης διαφορᾶς καταβιβάζομεν τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ δευτέρου τμήματος καὶ τὸν σχηματιζόμενον ἀριθμὸν (ἐνταῦθα τὸν 25) διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, τὸν ὁποῖον εὑρίσκομεν ὑψοῦντες τὸ εὑρεθὲν ψηφίον τῆς ρίζης (τὸ 2) εἰς τὸ τετράγωνον, καὶ ἔπειτα τριπλασιάζοντες τοῦτο (ἐνταῦθα εἶναι $2^2 \times 3 = 12$). Τὸ πηλίκον, ἂν εἶναι μονοψήφιον, δυνατὸν νὰ εἶναι τὸ δεύτερον ψηφίον τῆς ρίζης. Ἵνα δοκιμάσωμεν τοῦτο, γράφομεν αὐτὸ δεξιὰ τοῦ πρώτου ψηφίου τῆς ρίζης καὶ τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν ὑψοῦμεν εἰς τὸν κύβον, τὸν ὁποῖον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ἀποτελουμένου ὑπὸ τῶν δύο πρώτων τμημάτων (ἐνταῦθα τοῦ 10526). Ἐὰν δὲν ἀφαιρῆται δοκιμάζομεν τὸν κατὰ μονάδα μικρότερον ἀριθμόν, μέχρις ὅτου εὕρωμεν ἀριθμὸν τοῦ ὁποίου ὁ κύβος δύναται νὰ ἀφαιρεθῇ Δεξιὰ τῆς διαφορᾶς (ἥτις ἐνταῦθα εἶναι 1245) καταβιβάζομεν τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ ἀκολούθου τμήματος, καὶ τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν (ἤτοι τὸν 12454) διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ ὅστις προκύπτει ἂν ὑψώσωμεν τὸ εὑρεθὲν μέρος τῆς ρίζης ἐνταῦθα τὸ εἰς τὸ τετράγωνον. Τὸ πηλίκον, ἂν εἶναι μονοψήφιον, δυνατὸν νὰ εἶναι τὸ τρίτον ψηφίον τῆς ρίζης· ἵνα δοκιμάσωμεν καὶ τοῦτο γράφομεν δεξιὰ τῶν δύο πρώτων ψηφίων, καὶ τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ ὑπὸ τῶν τριῶν πρώτων τμημάτων ἀποτελουμένου ἀριθμοῦ, ἄλλως ἐλαττοῦμεν τὸ εὑρεθὲν ψηφίον κατὰ μονάδα μέχρις ὅτου εὕρωμεν ἀριθμόν, τοῦ ὁποίου ὁ κύβος δύναται νὰ ἀφαιρεθῇ. Ἐὰν ὑπάρχουν περισσότερα τμήματα, ἐξακολουθοῦμεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον μέχρι τέλους.

Παρατήρησις. Ἂν πηλίκον διαιρέσεώς τινος εἶναι διψήφιος ἀριθμός, ἀρχόμεθα τῶν δοκιμῶν ἀπὸ τοῦ 9, ἂν δὲ διαίρεσίς τις δὲν ἐκτελῆται ἤτοι ἂν δίδῃ πηλίκον 0, τότε γράφομεν τοῦτο δεξιὰ τῶν εὑρεθέντων ψηφίων τῆς ρίζης καὶ ἐξακολουθοῦμεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον.

Κυβικὴ ρίζα τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

Ὅταν πρόκηται νὰ εὕρωμεν τὴν κυβικὴν ρίζαν δεκαδικοῦ τινος ἀριθμοῦ, ἂν εἶναι ἀνάγκη γράφομεν κατόπιν αὐτοῦ ἓν ἢ δύο μηδενικά, ἵνα δύναται τὸ δεκαδικὸν μέρος νὰ χωρισθῇ εἰς τριψήφια τμήματα, καὶ τότε χωρίζομεν ὅπως ἀνωτέρω, καὶ ἐκτελοῦμεν τὴν πρᾶξιν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, μὲ μόνην τὴν διαφορὰν ὅτι, τὸ μέρος τῆς ρίζης τὸ προερχόμενον ἐκ τοῦ ἀκεραίου μέρους τοῦ ἀριθμοῦ θὰ ἦναι ἀκέραιον, τὸ δὲ ἐκ τοῦ δεκαδικοῦ δεκαδικόν.

Ὡς παράδειγμα ἔστω ὁ ἀριθμὸς 45,7563. Ἐπειδὴ τὸ δεκαδικὸν μέρος ἔχει τέσσαρα ψηφία γράφομεν καὶ δύο μηδενικὰ καὶ τότε θὰ ἔχωμεν τὸν ἀριθμὸν 45756300, ὅστις χωρίζεται 45.756.300 τὸ μέρος τῆς ρίζης τὸ ὁποῖον θὰ προέλθῃ ἀπὸ τὸν 45 θὰ χωρίσωμεν δι' ὑποδιαστολῆς ὡς ἀκέραιον τὰ δὲ ἄλλα θὰ εἶναι δεκαδικά.

Εὕρεσις τῆς κυβικῆς ρίζης κλασματικοῦ ἀριθμοῦ.

Ἂν ἔχωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν κυβικὴν ρίζαν κλασματικοῦ τινος, οἷον $\frac{22}{25}$ ἀριθμοῦ, τρέπομεν αὐτὸν εἰς δεκαδικὸν 0,88 καὶ πράττομεν ὡς ἀνωτέρω.

Εὕρεσις τῆς κυβικῆς ρίζης ἀκεραίου ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν δεκαδικῆς τινος μονάδος.

Ἂν θέλωμεν ἀκεραίου τινος ἀριθμοῦ νὰ εὕρωμεν τὴν κυβικὴν ρίζαν μὲ ὡρισμένον ἀριθμὸν δεκαδικῶν ψηφίων, γράφομεν κατόπιν τοῦ ἀκεραίου, ὡς δεκαδικά, τριπλάσιον ἀριθμὸν μηδενικῶν παρ' ὅσα εἶναι τὰ ὁριζόμενα δεκαδικὰ ψηφία τῆς ρίζης, καὶ πράττομεν, ὡς ὅταν πρόκηται νὰ εὑρεθῇ ἡ κυβικὴ ρίζα δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ. Ἡ τοιαύτη ρίζα λέγεται κατὰ προσέγγισιν μιᾶς μονάδος τῆς τελευταίας δεκαδικῆς τάξεως τῆς ρίζης.

Δοκιμή. Ἵνα δοκιμάσωμεν ἂν ἡ εὑρεθεῖσα κυβικὴ ρίζα εἶναι ἀκριβής, ὑψοῦμεν αὐτὴν εἰς τὸν κύβον καὶ εἰς τοῦτον προσθέτομεν τὸ ὑπόλοιπον. Ἂν ἡ ρίζα εἶναι ἀκριβὴς πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸν δοθέντα ἀριθμόν.

ΠΙΝΑΞ ΤΩΝ ΝΟΜΙΣΜΑΤΙΚΩΝ ΚΕΡΜΑΤΙΩΝ ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΚΡΑΤΩΝ

	Ὀνομασίαι ΤΟΥΡΚΙΑ	χρυσᾶ γρόσια	ἀξία εἰς φράγκα	βάρος εἰς γραμμάρ.	Τίτλος
Χρυσᾶ	Πεντάλιρον	500	113,92	36,082	$0,916\frac{2}{3}$
	$2\,^1/_2$ λίραι Τ.	250	56,96	18,041	»
	Λίρα Τ.	100	22,68	7,216	»
	$^1/_2$ λίρα	50	11,39	3,608	»
	$^1/_4$ λίρας	25	5,70	1,804	»
Ἀργυρᾶ	Μετζήτιον=20 γρόσ. ἀργυρᾶ	$18\,^1/_2$	4,44	24,055	0,380
	$^1/_2$ μετζήτιον=10 γρόσ. ἀργ.	$9\,^1/_4$	2,22	12,027	»
	$^1/_4$ μετζητίου=5 γρόσ. ἀργ.	4,63	1,11	6,013	»
	2 γρόσια		0,44	2,405	
	100 παράδες (μπεσλίκιον)		0,55		
	50 παράδες		$0,27\,^1/_2$	-	
	Γρόσιον=40 παράδες		0,22	$1,202\frac{1}{2}$	0,830
	$^1/_2$ γρόσιον=20 παράδες				
	Μεταλλίκιον=10 παράδες				

Τὰ διάφορα νομίσματα τὰ ἐν χρήσει ἐν Τουρκίᾳ, εἰς τὰς διαφόρους ἐπαρχίας ἐν τῷ ἐμπορίῳ καὶ τῇ ἀγορᾷ ἔχουσι διάφορον ὀνομαστικὴν ἀξίαν, ὡς φαίνονται κατωτέρω, τῶν ὁποίων τὰ κυριώτερα ἀναγράφομεν. Ἀλλὰ καὶ τῶν μὴ ἀναγραφομένων, ἡ ἀξία εἶναι ἀνάλογος. Οὕτως ἐν

Ἀδριανουπόλει. Τουρκ. λίρ. 123 γρόσ. Εἰκοσάφρ. 108 γρόσ. Μετζήτιον $22\,^1/_2$ γρόσια. Μπεσλίκιον 3 γρόσ,, Μεταλλίκιον 12 παρ.

Ἀλεξ νδρέττᾳ. Τουρκ. λίρ. 125 γρόσ. Ἀγγλ. λίρ. 138 γρόσ. Εἰκοσάφρ. 110 γρόσ. Μετζήτιον $23\,^1/_2$ γρόσ. Μεταλλίκιον (10 παρ.) 25 παρ.

Ἀντιοχείᾳ. Τουρκ. λίρ. 128 γρόσ. Ἀγγλ. λίρ. 141 γρόσ. Εἰκοσάφρ. 112 γρόσ. Μετζήτον 24 γρόσ.

Βαγδάτῃ. Τουρκ. λίρ. $103\,^1/_4$ γρόσ. Ἀγγλ. λίρ. 114 γρόσ. Εἰκοσάφρ. $90\,^1/_2$ γρόσ. Ρουπία ἀγγλ. 7 γρόσ. Μετζήτιον 20 γρόσ. Τόμαν Περσικὸν 40 γρόσ.

Βηρυτῷ. Τουρ. λίρ. 124 γρόσ. Ἀγγλ. λίρ. $136\,^3/_4$ γρόσ. Εἰκοσάφρ. $108\,^3/_4$ γρόσ. Μετζήτιον $23\,^7/_{40}$ γρόσ. Μπεσλίκιον $3\,^5/_{40}$ γρόσ.

Δαμασκῷ. Τουρκ. λίρ. $126\,^1/_2$ γρόσ. Ἀγγλ. λίρ, 139 γρόσ. Εἰκοσάφρ.

$110\,{}^1/_2$ γρόσ. Δουκᾶτον $64\,{}^1/_4$ γρόσ. Μετζήτιον $23\,{}^1/_2$ γρόσ. Μπεσλίκιον $3\,{}^3/_4$ γρόσ. Μεταλλίκιον $12\,{}^1/_2$ παρ.

Θεσσαλονίκῃ. Τουρκ. λίρ. 154 γρόσ. Μετζήτιον $28\,{}^1/_2$ γρόσ. Γρόσιον $1\,{}^1/_2$ γρόσ. Μεταλλίκιον 15 παρ.

Ἰωαννίνοις. Τουρκ. λίρ. 109 γρόσ. Εἰκοσάφρ. 95 γρόσ. Ἀγγλ. λίρ. 119 γρόσ. Μετζήτιον $20\,{}^1/_2$ γρόσ.

Κυδωνίαις. Τουρκ. λίρ. 178 γρόσ. Εἰκοσάφρ. 156 γρόσ. Μετζήτιον 33 γρόσ. Εἰς τὸ ἐμπόριον τοῦ ἐλαίου τὸ μετζήτιον ὑπολογίζεται 21 γρόσ.

Κωνσταντινουπόλει. Ἡ ἀγοραία τιμὴ τῆς τουρκ. λίρας εἶναι 108 γρόσ. ἀργ., Ἀγγλ. λίρ. 120 γρόσ. Εἰκοσάφρ. 95 γρόσ. Δουκᾶτον 56 γρόσ. Μετζήτιον 20 γρόσ. Μεταλλίκιον 10 παρ.

Ξάνθῃ. Τουρκ. λίρ. 183 γρόσ. Ἀγγλ. λίρ. 200 γρόσ. Εἰκοσάφρ. 163 γρόσ. Μετζήτιον 34 γρόσ. Μπεσλίκιον $4\,{}^1/_2$ γρόσ. Μεταλλίκιον (ιο παρ.) 18 παρ.

Ραιδεστῷ. Τουρκ. λίρ. 135 γρόσ. Ἀγγλ. λίρ. 149 γρόσ. Εἰκοσάφρ. 118 γρόσ. Δουκᾶτον (Κριμίτσα) 69 γρόσ. Μετζήτιον 25 γρόσ.

Σάμῳ. Τουρκ. λίρ. 111 γρόσ. Ἀγγλ. λίρ. $121\,{}^1/_4$ γρόσ. Εἰκοσάφρ. 97 γρόσ. Πεντόφραγκον ἀργ. $23\,{}^3/_4$ γρόσ. Φράγκον ἀργ. $4\,{}^3/_4$ γρόσ. Σελ. $5\,{}^3/_4$ γρόσ.

Σαράντα Ἐκκλησίαις. Τουρκ. λίρ. 135 γρόσ. Αγγλ. λίρ. 149 γρόσ. Εἰκοσάφρ. 118 γρόσ. Μετζήτιον 25 γρόσ. Μπεσλίκιον $3\,{}^1/_2$ γρόσ.

Χαλεπίῳ. Τουρκ. λίρ. $125\,{}^1/_2$ γρόσ. Ἀγγλ. λίρ. 138 γρόσ. Εἰκοσάφρ. $109\,{}^1/_2$ γρόσ. Μετζήτιον $23\,{}^1/_2$ γρόσ.

Χίῳ. Τουρκ. λίρ. $124\,{}^1/_2$ γρόσ. Ἀγγλ. λίρ. 137 γρόσ. Εἰκοσάφρ. 109 γρόσ. Μετζήτιον 23 γρόσ. Φράγκον ἀργ. $5\,{}^1/_4$ γρόσ.

	Ὀνομασία ΛΑΤΙΝΙΚΗ ΕΝΩΣΙΣ	γρόσια χρυσᾶ	ἀξία εἰς φράγκα	βάρος εἰς γραμμάρ.	τίτλος
χρυσᾶ	Ἑκατοντάδραχμον ἢ ἑκατόφραγκ.	439,80	100	32,258	0,900
	Πεντηκοντάδραχμον ἢ πεντηκοντάφραγκον	219,90	50	16,129	»
	Εἰκοσάδραχμον ἢ εἰκοσάφραγκον	8,796	20	6,4516	»
	Δεκάδραχμον ἢ δεκάφραγκον	4,398	10	3,2258	»
	Πεντάδραχμον ἢ κτλ.	2,199	5	1,6129	»
ἀργυρᾶ	Πεντάδραχμον ἢ πεντάφραγκον	2,199	5	25	»
	Δίδραχμον ἢ κτλ.	8,796	2	10	0,835
	Δραχμὴ ἢ φράγκον=100 λεπτὰ	4,398	1	5	»
	Ἡμίδραχμον ἢ ἡμίφραγκον	2,20	0,50	2,5	»
	Εἰκοσάλεπτον=20 λεπτὰ	0,88	0,20	1	»

	Ὀνομασία	γρόσ. χρ.	φράγκα	βάρος γρμ.	τίτλος
	ΑΓΓΛΙΑ				
Χρυσᾶ	Πεντάλιρον	554,588	126,10	39,940	0,916 $\frac{2}{3}$
	2 λίραι	221,835	50,44	15,976	»
	1 λίρα (στερλίνα)=20 σελί-	110,917	25,22	7,988	»
	½ λίρα » νια	55,458	12,61	3,994	»
Ἀργυρᾶ	Κορώνη 5 σελλίνια	25,522	5,81	28,276	0,925
	½ κορώνη=2 ½ σελλ.	12,761	2,91	14,138	»
	Διπλοῦν φιορίνιον=4 σελλ.	20,407	4,64	22,621	»
	Φιορίνιον=2 σελλ.	10,208	2,32	11,310	»
	1 σελλίνιον=12 πέννας	5,104	1,16	5,655	»
	6 πένναι	2,552	0,58	2,828	»
	4 »	1,700	0,36	1.885	»
	3 »	1,276	0,29	1,414	»
	2 »	0,850	0,19	0,942	»
	1 πέννα=4 φαρδίνια	0,425	$0,9\frac{1}{2}$	0,471	»
	ΑΙΓΥΠΤΟΣ				
Χρυσᾶ	Λίρα Αἰγυπτιακή=100 γρόσια	112,633	25,61	8,5	0,875
	½ λίρα	56,316	12,81	4,25	»
	20 γρόσια	22,526	5,13	1,7	»
	10 γρόσια	11,26	2,56	0,85	»
	5 γρόσια	5,63	1,28	0,425	»
Ἀργυρᾶ	20 γρόσια	22,781	5,18	28	0,833 $\frac{1}{2}$
	10 »	11,391	2,59	14	»
	5 »	5,696	1,29	7	»
	2 »	2,28	0,52	2,8	»
	1 γρ =10 ochr-el-querche	1,14	0,26	1,4	»
	ΑΡΓΕΝΤΙΝΗ				
Χρυσᾶ	Λίρα Ἀργεντινή=5 πέζα	109,95	25	8,0645	0,900
	½ λίρα	54,975	12,50	4,0322	»

Ὀνομασία	γρόσ. χρ.	φράγκα	βάρος γρμ.	τίτλος
ἀργυρᾶ: 1 πέζον	21,99	5	25	»
ἀργυρᾶ: 1/2 πέζον=50 ἑκατ. (centàvos)	10,995	2,50	12,5	»
ἀργυρᾶ: 20 ἑκατ.	4,398	1	5	»
ἀργυρᾶ: 10 ἑκατ.	2,199	0,50	2, 5	»
ἀργυρᾶ: 5 ἑκατ.	1,099	0,25	1,25	»

ΑΥΣΤΡΟΟΥΓΓΑΡΙΑ

Ὀνομασία	γρόσ. χρ.	φράγκα	βάρος γρμ.	τίτλος
χρυσᾶ: 20 κορῶναι	92,358	21	6,755	0,900
χρυσᾶ: Εἰκοσάφραγκον=8 φιορίνια	87,96	20	6,4516	»
χρυσᾶ: Δουκᾶτον (κρεμίτσα)	52,116	11,85	3,491	0,986 1/3
χρυσᾶ: 10 κορῶναι	46,179	10,50	3,3875	0,900
ἀργυρᾶ: Φιορίν.=2κορῶν.=100κρόϊτσερ	10,863	2,47	12,3457	»
ἀργυρᾶ: Κορών.=50κρόϊτ.=100 χέλερ	4,718	1,05	5	0,835
ἀργυρᾶ: Ταλλ. Μαρίας Θηρεσίας	2,287	5,20	28,0668	0,833

ΒΕΛΓΙΟΝ

Ἰδὲ Λατινικὴ Ἕνωσις

ΒΕΝΕΖΟΥΕΛΑ

Ἰδὲ Λατινικὴ Ἕνωσις. Το φράγκον ὀνομάζεται Βολιβάρ, τὸ δὲ λεπτὸν centavos (ἑκατοστόν).

ΒΟΥΛΓΑΡΙΑ

Ἰδὲ Λατινικὴ Ἕνωσις. Τὸ φράγκον ὀνομάζεται Λέβιον, τὸ δὲ λεπτὸν Στοτίγκις.

ΒΡΑΖΙΛΙΑ

Ὀνομασία	γρόσ. χρ.	φράγκα	βάρος γρμ.	τίτλος
χρυσᾶ: 20 μιλρέϊς (milréis)	249,059	56,63	17,929	0,916 2/3
χρυσᾶ: 10 »	124,529	28,32	8,965	»
χρυσᾶ: 5 »	62,279	14,16	4,482	»
ἀργυρᾶ: 2 »	22,826	5,19	25,5	»
ἀργυρᾶ: 1 »=1000 ρέϊς	11,413	2,60	1,275	»
ἀργυρᾶ: 500 ρέϊς	5,70	1,30	6,375	»

	Ὀνομασία	γρόσ, χρ.	φράγκα	βάρος γρμ.	τίτλος
	ΓΑΛΛΙΑ				
	Ἰδὲ Λατινικὴ ἕνωσις.				
	Τὸ λεπτὸν λέγεται σ α ν τ ὶ μ (centime)				
	ΓΕΡΜΑΝΙΑ				
χρυσᾶ	20 μάρκα	108,587	24.69	7,965	0,900
	10 »	54,293	12,35	3,982	»
	5 »	27,146	6,17	1,991	»
ἀργυρᾶ	5 μάρκα	24,453	5,56	27,778	»
	2 »	9,781	2,22	11,111	»
	1 » =100 φοίνικας	4,495	1,11	5,556	»
	50 φοίνικας	2,440	0,56	2,778	»
	20 »	0,968	0,22	1,111	
	ΔΑΝΙΑ				
χρυσᾶ	20 κρόνερ	122,176	27,78	8,9606	0,900
	10 »	60,988	13,89	4,4803	»
ἀργυρᾶ	2 κρόνερ	11,742	2,67	15	0,800
	1 κρόνερ=100 ἔρε	5,871	1,33	7,5	»
	25 ἔρε	1,468	0,32	2,42	0,600
	10 ἔρε	0,587	0,13	1.45	0,400
	ΗΝΩΜΕΝΑΙ ΠΟΛΙΤΕΙΑΙ				
χρυσᾶ	Διπλοῦς ἀετὸς=20 δολλάρια	455,853	103,65	38,436	0,900
	Ἀετὸς=10 δολλάρια	227,926	51,83	16,718	»
	$^1/_2$ ἀετὸς=5 δολλ.	113,963	25,91	8,359	»
	$^1/_4$ ἀετοῦ=2,5 δολλ.	56,981	12,95	4,179	»
	Δολλάριον	22,782	5,18	1,672	»
ἀργυρᾶ	Δολλάριον=100 ἑκατ. (cents)	23,485	5,34	26,729	»
	$^1/_2$ δολλάριον	10,995	2,50	12,5	»
	$^1/_4$ δολλ.	5,497	1.25	6,25	»
	Ντέϊμ=10 ἑκατοστὰ	2,199	0,50	2,5	»

	Ὀνομασία	γρόσ. χρ.	φραγκα	βάρ. γρμ.	τίτλος
	ΟΛΛΑΝΔΙΑ				
χρυσᾶ	Διπλοῦν Δουκᾶτον	103,53	23,54	6,988	0,983
	Δουκᾶτον	51,76	11,77	3,498	»
	Guillaume 10 φιορίνια	91,61	20,83	6,72	0,900
ἀργυρᾶ	Ριξτάλερ $2\,^1/_2$ φιορίνια	22,87	5,20	25	0,945
	1 φιορ.=100 ἑκατοστὰ (cents)	9,15	2,05	10	»
	$^1/_2$ φιορίνιον	4,57	1,04	5	»
	25 ἑκατοστὰ	2,22	0,50	3,575	0,640
	10 »	0,88	0,20	1,4	»
	5 »	0,44	0,10	0,685	»
	ΠΕΡΣΙΑ				
χρυσᾶ	2 Τόμαν=20 Κρὰν	77,67	17,66	5,70	0,900
	1 »	38.83	8,83	2,85	»
	$^1/_2$ »	19,41	4,42	1,42	»
ἀργυρᾶ	5 κρὰν	20,23	4,60	23	»
	2 »	8,09	1,84	9,20	»
	1 »	4,05	0,92	4,60	»
	1 Μπαναμπὰτ $^1/_2$ κρὰν=10 σάχια	2,02	0,46	2,30	»
	1 Ἀβασὶ=$^1/_4$ κρὰν=5 σάχια	1,01	0,23	1,15	»
	ΠΟΡΤΟΓΑΛΛΙΑ				
χρυσᾶ	Κορώνη=10 μιλρέϊς	246,29	56	17,735	$0,916^2/_3$
	$^1/_2$ κορώνη=5 μιλρέϊς	123,14	28	8,868	»
	$^1/_5$ κορώνης=2 μιλρέϊς	49,26	11,20	3,547	»
	$^1/_{10}$ κορώνης=1 μιλρέϊς=1000 ρέϊς	24,63	5,60	1,774	»
ἀργυρᾶ	500 ρέϊς	12,31	2,80	12,5	»
	200 »	4,93	1.12	5	»
	100 »	2,64	0,56	2,5	»
	50 »	1,23	0,28	1,25	»
	ΡΟΥΜΑΝΙΑ				
	Ἰδὲ Λατινικὴ ἕνωσις				
	Τὸ φράγκον λέγεται Λέϊιον, τὸ δὲ λεπτὸν Μπάνια. Κερμάτια τινὰ ἐλλείπουσι.				

Ὀνομασία	γρόσ. χρ.	φράγκα	βάρος γρμ.	τίτλος
ΙΑΠΩΝΙΑ				
χρυσᾶ 20 γιέν	227,20	51,66	16,6665	0,900
10 «	113,60	25,83	8,3333	»
5 »	56,30	10,33	4,1666	»
ἀργυρᾶ 50 ἑκατοστὰ τοῦ γιέν (sen)	11,203	2,57	13,4783	0,800
20 » »	4,481	1,02	5,3914	»
10 » »	2,241	0,51	2,6955	»
ΙΤΑΛΙΑ				
(Ἰδὲ Λατ. ἕνωσις. Το φράγκ. λέγεται λίρα, τὸ δὲ λεπτὸν τσεντέσιμον centesimo).				
ΙΝΔΙΑΙ ΑΓΓΛΙΚΑΙ				
χρυσᾶ Μοχοὺρ 15 ρούπιαι	161,98	36,83	11,663	0916$^2/_3$
$^2/_3$ μοχοὺρ=10 ρούπιαι	107,97	24,55	7,776	»
$^1/_3$ μοχοὺρ=5 ρούπιαι	53,98	12,28	3,888	»
ἀργυρᾶ 1 ρούπια=16 ἀνναὶ	10,47	2,38	11,664	»
$^1/_2$ ρούπια=8 ἀνναὶ	5,23	1,19	5.832	»
$^1/_4$ ρουπίας	2,61	0,595	2,916	»
$^1/_8$ ρουπίας	1,30	0,30	1,458	»
ΚΟΛΟΜΒΙΑ				
Ἰδὲ Λατ. ἕνωσις. Τὸ ἑκατόφραγκον λέγεται Διπλοῦν Κόνδορ. Τοῦτο ἰσοδυναμεῖ πρὸς 20 ἀργυρᾶ πεντόφραγκα, τὰ ὁποῖα λέγονται πέζα. Ἕκαστον πέζον διαιρεῖται εἰς 100 ἑκατοστὰ (centavos).				
ΜΕΞΙΚΟΝ				
χρυσᾶ 20 πέζα	448,60	102	33,841	0,875
10 »	224,30	51	16,92	»
5 »	112,15	25,50	8,46	»
2 $^1/_2$ »	56,07	12,75	4,23	»
1 «	22,43	5,10	1,692	»
ἀργυρᾶ 1 πέζον=100 ἑκατ. centavos	23,88	5,43	27,073	0,902
50 ἑκατοστὰ	11,94	2,71	13,536	»
25 »	5,96	1,35	6,768	»
10 »	2,38	0,54	2,707	»
5 »	1,19	0,27	1,353	»

	Ὀνομασία	γρόσ. χρ.	φράγκα	βάρ. γρμ.	τίττλος
	ΡΩΣΣΙΑ				
χρυσᾶ	Πόλι Αὐτοκρατορικὸν	175,92	40	12,9036	0,900
χρυσᾶ	$1/2$ πόλ=5 παλαιὰ ρούβλ. ἢ $7\,1/2$ νέα ρούβλ.	78,96	20	6,4518	»
ἀργυρᾶ	Ρούβλιον νέον=100 κοπέκια	11,70	2,66	20	»
ἀργυρᾶ	50 κοπέκια	5,85	1,33	10	»
ἀργυρᾶ	25 »	2,92	0,66	5	0,500
ἀργυρᾶ	20 »	1,76	0,40	3,599	»
ἀργυρᾶ	15 »	1,32	0,30	2,699	»
ἀργυρᾶ	10 »	0,88	0,20	1,799	»
ἀργυρᾶ	5 »	0,44	0,10	0,899	»
	ΣΑΛΒΑΔΩΡ ἴδε Λατ. ἕνωσις. Τὸ φράγκ. λέγεται Πέζον, τὸ δὲ λεπτὸν ἑκατοστὸν(centavos)				
	ΣΕΡΒΙΑ ἴδε Λατ. ἕν. Τὸ φράγκον λέγεται Δινάριον τὸ δὲ λεπτὸν παρᾶς.				
	ΣΙΝΙΚΗ				
ἀργυρᾶ	Πιάστρον=100 ἑκατοστὰ	23,66	5,38	26,90	0,900
ἀργυρᾶ	50 ἑκατοστὰ	11,30	2,57	13,45	0,866
ἀργυρᾶ	20 »	4,31	0,98	5,38	0,820
ἀργυρᾶ	10 »	2,155	0,49	2,69	»
ἀργυρᾶ	5 »	1,10	0,25	1,345	»
	ΣΟΥΗΔΙΑ καὶ ΝΟΡΒΗΓΙΑ ἴδε Δανία				

Διὰ τὰ νομίσματα καὶ τῶν ἄλλων κρατῶν ἴδε Alphonse Lejeune Monnaies poids et mesures des principaux pays καὶ Meliot Dictionnaire Universel des monnaies courantes.