# ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ
# ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΥΠΟ

ΙΩΑΝΝΟΥ Β. ΛΕΛΑΚΗ

ΛΟΧΑΓΟΥ ΤΟΥ ΠΥΡΟΒΟΛΙΚΟΥ

καὶ Καθηγητοῦ ἐν τῷ Στρατιωτικῷ Σχολείῳ τῶν Εὐελπίδων

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ

ΕΚ ΤΟΥ ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΥ ΠΥΛΑΔΟΥ Γ. ΒΑΘΗ

*Ἀκριβῶς ἔναντι Ὑπουργείου Ναυτικῶν*

1902

# ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ
# ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι.

**1.** Ὁρισμός.—Ἡ περιγραφικὴ γεωμετρία σκοπὸν ἔχει τὴν αὐστηρὰν παράστασιν ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου, τῶν σημείων, τῶν γραμμῶν καὶ τῶν ἐπιφανειῶν.

**2.** Πλεῖστα συστήματα εἶναι γνωστὰ πρὸς παράστασιν τῶν σωμάτων διὰ σχεδίου, ἡ Περιγραφικὴ Γεωμετρία μεταχειρίζεται τὰς ὀρθογωνίους προβολὰς ἄνευ σκηνογραφίας καὶ ἄνευ προεξοχῶν σκιερῶν.

**3.** Μέθοδος τῶν προβολῶν.—Φανταζόμεθα δύο ἐπίπεδα τεμνόμενα (σχ.1) τὸ μὲν ὁριζόντιον ΓΟ, τὸ δὲ κατακόρυφον ΕΚ. Τὰ δύο ταῦτα ἐπίπεδα χρησιμεύουσι διὰ νὰ παραστήσωσι πάντα τὰ σώματα καὶ πάντα τὰ στοιχεῖα τῆς παραστάσεως ταύτης, σημεῖα, γραμμὰς ἐπιφανείας, καλοῦνται δὲ προβολικά, καὶ τὸ μὲν ὁριζόντιον ἐπίπεδον ΓΟ καλεῖται ὁριζόντιον προβολικὸν ἐπίπεδον, τὸ δὲ κατακόρυφον ἐπίπεδον ΕΚ κορυφαῖον προβολικόν. Ἡ τομή των ΓΕ καλεῖται γραμμὴ τοῦ ἐδάφους.

### Παράστασις σημείου.

**4.** Προβολαὶ σημείου.—Προβολὴ ἑνὸς σημείου ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου εἶναι ὁ ποῦς τῆς καταβιβαζομένης καθέτου ἐκ τοῦ σημείου πρὸς τὸ ἐπίπεδον.

Ἔστω τὸ σημεῖον Α τοῦ διαστήματος· ἡ προβολὴ τούτου ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ (σχ.2) εἶναι τὸ σημεῖον **α**. Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον ΜΝ εἶναι τὸ ὁριζόντιον προβολικὸν τότε τὸ **α** εἶναι ἡ ὁριζόντιος προβολὴ τοῦ Α. Τὸ σημεῖον **α** λαμβανόμενον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ ὡς προβολὴ σημείου τοῦ διαστήματος δίδει τὴν διεύθυνσιν τῆς ὑψουμένης καθέτου ἐκ τοῦ **α** πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ ἀλλ' οὐχὶ καὶ τὴν ὡρισμένην θέσιν τοῦ σημείου **Α** τοῦ διαστήματος διότι ἅπαντα τὰ σημεῖα Α, $A_1$, $A_2$,... τῆς καθέτου $\mathbf{A_2 a}$ (σχ.3) ἔχουσι ὡς προβολὴν τὸ σημεῖον **α**.

Ἵνα παραστήσωμεν ἀκριβῶς ἓν σημεῖον τοῦ διαστήματος λαμβάνομεν ἀμφοτερα τὰ προβολικὰ ἐπίπεδα (σχ.4) καὶ προβάλλομεν τὸ σημεῖον Α τοῦ διαστήματος ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου προβολικοῦ ἐπιπέδου ΓΟ καὶ ἐπὶ τοῦ κορυφαίου ΕΚ καὶ ἡ μὲν ὁριζόντιος προβολὴ τοῦ Α εἶναι τὸ α ἐπὶ δὲ τοῦ κορυφαίου προβολικοῦ ἐπιπέδου προβολὴ τοῦ Α, ἥτις κορυφαία προβολὴ καλεῖται εἶναι τὸ α' ·ἤδη ἔχομεν τὸ μέσον τῆς παραστάσεως τοῦ ἐν τῷ διαστήματι σημείουΑ, καθόσον ἐὰν ὑποθέσωμεν ἀντιστρόφως ὅτι ἐδόθησαν αἱ προβολαὶ α καὶ α', εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ σημεῖον Α εἶναι προσδιορισμένον, διότι τὸ σημεῖον α προσδιορίζει τὴν κάθετον ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου προβολικοῦ ἐπιπέδου τὴν διερχομένην διὰ τοῦ Α, ὡσαύτως τὸ α' προσδιορίζει τὴνκάθετον ἐπὶ τοῦ κορυφαίου προβολικοῦ ἐπιπέδου τὴν διερχομένην διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Α, αἱ δύο κάθετοι συναντόμεναι προσδιορίζουσι τὸ σημεῖονΑ.

**5.** Προβάλλουσαι.—Αἱ κάθετοι Αα καὶ Αα' καλοῦνται προβάλλουσαι εὐθεῖαι (σχ.5)· ἐὰν διὰ τῶν καθέτων τούτων φαντασθῶμεν τὸ ἐπίπεδον τὸ διερχόμενον δι' αὐτῶν τοῦτο θὰ τμήσῃ τὸ μὲν κορυφαῖον προβολικὸν ΚΕ κατὰ τὴν α'ο ἥτις εἶναι κάθετος εἰς τὴν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους, τὸ δὲ ὁριζόντιον ΕΟ κατὰ τὴν αο ἥτις εἶναι κάθετος εἰς τὴν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους· αἱ δύο αὗται κάθετοι α'ο καὶ αο συναντῶνται εἰς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον Ο τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους.

**6.** Κατάκλισις τοῦ κορυφαίου προβολικοῦ.— Τῶν σημείων **α,α'** ὡρισθέντων ὑποθέτομεν ὅτι τὸ μὲν ὁριζόντιον προβολικὸν ἐπίπεδον μένει ἀκίνητον τὸ δὲ κορυφαῖον προβολικὸν ἐπίπεδον περιστρεφόμενον πέριξ τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους (σχ.6) εἰς τρόπον ὥστε νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τοῦ ὁριζοντίου προβολικοῦ ἐπιπέδου, τότε μετὰ τὴν κατάκλισιν τὸ σημεῖον α' πίπτει εἰς $α'_1$.

Διὰ τῆς κατακλίσεως ταύτης τὰ σημεῖα α καὶ α' τοποθετοῦνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ ἔχομεν τὴν ὑπὸ τοῦ (σχ.7) παράστασιν τοῦ ἐν τῷ διαστήματι σημείου Α ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου· διὰ τῆς παραστάσεως ταύτης ἔχει τις ἐν σχέδιον τῆς Περιγραφικῆς Γεωμετρίας.

**7.** Συγκεφαλαίωσις.—Λαμβάνομεν δύο προβολικὰ ἐπίπεδα, προβάλλομεν ἐφ' ἑκάστου τῶν ἐπιπέδων τούτων τὸ ἐν τῷ διαστήματι δοθὲν σημεῖον, ὑποθέτομεν τὸ μὲν ἀκίνητον τὸ δὲ περιστρεφόμενον πέριξ τῆς τομῆς των μέχρις ὅτου τὸ ἐπίπεδον τοῦτο πέσει ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τοῦ πρώτου, μετὰ τὴν κατάκλισιν ταύτην αἱ δύο προβολαὶ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ὅπερ εἶναι τὸ τοῦ σχεδίου.

**8.** Δέον νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι αἱ προβολαὶ σημείου τινὸς ὀφείλουσι νὰ εὑρίσκωνται ὡς πρὸς τὴν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους εἰς θέσεις ὡρισμένας διὰ νὰ δύνανται νὰ παριστάνουσι σημεῖόν τι τοῦ διαστήματος.

Ἂς ἐξετάσωμεν τοὺς ὅρους τούτους.

Ἔστω τὸ σημεῖον Α τοῦ διαστήματος (σχ.6) τοῦ ὁποίου αἱ προβολαὶ εἶναι α καὶ α' αἵτινες ἐπιτεύχθησαν διὰ τῶν καθέτων Αα καὶ Αα' ἐὰν διὰ τῶν σημείων α καὶ α' καταβιβάσωμεν καθέτους εἰς τὴν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους αὗται θὰ συναντηθῶσιν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους.

Μετὰ τὴν κατάκλισιν τοῦ κορυφαίου προβολικοῦ ἐπιπέδου, ἡ κορυφαία προβολὴ α εὑρεθήσεται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς αο καθόσον κατὰ τὴν κίνησιν ταύτην, ἡ εὐθεῖα α΄ο μένει πάντοτε κάθετος εἰς τὴν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους, διὰ τοῦτο ἐν τῷ (σχ.7) αἱ προβολαὶ α καὶ α΄ τοῦ σημείου Α κεῖνται ἐπὶ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς καθέτου εἰς τὴν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους, ὁ ὅρος οὗτος εἶναι ἄλλως τε ἀναγκαῖος καὶ ἱκανὸς ὅπως παρασταθῇ σημεῖόν τι τοῦ διαστήματος.

Ἄς ὑποθέσωμεν τὸ κορύφαῖον προβολικὸν ἀνορθωθὲν ὡς εἰς τὸ (σχ.6) καὶ ἄς φαντασθῶμεν διὰ τῶν γραμμῶν α΄ο καὶ αο τὸ διερχόμενον ἐπίπεδον τοῦτο θὰ εἶναι κάθετον εἰς τὴν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους καὶ ἐπομένως εἰς ἀμφότερα τὰ προβολικά, ὅθεν ἐὰν ὑψώσωμεν ἐκ τῶν σημείων α καὶ α΄ καθέτους εἴς τε τὸ ὁριζόντιον καὶ κορυφαῖον προβολικὸν αἱ κάθετοι αὗται θὰ ἐμπεριέχωνται εἰς τὸ ἀχθὲν ἐπίπεδον διὰ τῶν γραμμῶν α΄ο καὶ αο, ἡ τομὴ τῶν καθέτων τούτων θὰ δώσῃ τὸ σημεῖον Α τοῦ διαστήματος· ὥστε βλέπομεν ὅτι τὸ σχέδιον (σχ.7) παριστᾷ ἀκριβῶς τὴν θέσιν ἑνὸς σημείου τοῦ διαστήματος.

**9.** Συγκεφαλαίωσις.—Διὰ νὰ εἶναι δύο σημεῖα εἰς σχέδιόν τι αἱ προβολαὶ σημείου τινὸς τοῦ διαστήματος πρέπει τὰ σημεῖα ταῦτα νὰ εὑρίσκωνται ἐπὶ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς καθέτου πρὸς τὴν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους.

**10.** Εἰς πᾶν σχέδιον τὸ κάτω μέρος τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους παριστᾷ τὸ ὁριζόντιον προβολικὸν ἐπίπεδον, καὶ τὴν προέκτασιν τοῦ κορυφαίου, τὸ δὲ ἄνω μέρος τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους παριστᾷ τὸ κορυφαῖον προβολικὸν ἐπίπεδον καὶ τὴν προέκτασιν τοῦ ὁριζοντίου.

**11.** Ἀπόστασις ἑνὸς σημείου ἐκ τῶν προβολικῶν ἐπιπέδων.—Ἡ ἀπόστασις ἑνὸς σημείου τοῦ διαστήματος ἀφ᾽ ἑνὸς τῶν προβολικῶν ἐπιπέδων μετρεῖται διὰ τῆς ἀποστάσεως τῆς προβολῆς τῆς ἐν τῷ ἑτέρῳ προβολικῷ ἐπιπέδῳ εὑρισκομένης ἀπὸ τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους.

(Σχ. 5). Ἔστω Α σημεῖόν τι τοῦ διαστήματος καὶ α,α΄ αἱ προβολαί του· ἐὰν ἐκ τῶν σημείων α καὶ α΄ ἄξωμεν καθέτους εἰς τὴν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους αὗται θὰ συναντηθῶσι εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον ο ἐπὶ τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους, τὸ δὲ σχηματιζόμενον σχῆμα Αα΄οα εἶναι ἓν ὀρθογώνιον καὶ θὰ ἔχωμεν Αα=α΄ο ἤτοι, ὅτι ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου Α ἐκ τοῦ ὁριζοντίου προβολικοῦ ἐπιπέδου ἰσοῦται μὲ τὴν ἀπόστασιν τῆς κορυφαίας του προβολῆς ἀπὸ τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους καὶ Α΄α=αο ἤτοι, ὅτι ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου Α ἐκ τοῦ κορυφαίου προβολικοῦ ἐπιπέδου ἰσοῦται μὲ τὴν ἀπόστασιν τῆς ὁριζοντίου του προβολῆς α ἀπὸ τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους.

**12.** Κατὰ συνθήκην εἰς τὴν Περιγραφικὴν Γεωμετρίαν αἱ μὲν ὁριζόνται προβολαὶ τῶν σημείων σημειοῦνται δι' ἀτόνων γραμμάτων αἱ δὲ κορυφαῖαι διὰ τονισμένων γραμμάτων.

**13.** Ὅταν ἓν σημεῖον Α εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου προβολικοῦ ἐπιπέδου (σχ. 8) τότε ἡ μὲν ὁριζόντιος προβολή του εἶναι αὐτὸ τοῦτο τὸ σημεῖον Α, ἡ δὲ κορυφαία του προβολὴ α' θὰ εἶναι ἐπὶ τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους. Τὸ (σχ. 9) παριστᾷ τὸ σχέδιον ἑνὸς σημείου κειμένου ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου προβολικοῦ ἐπιπέδου.

**14.** Ὅταν ἓν σημεῖον Α (σχ. 10) εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ κορυφαίου προβολικοῦ ἐπιπέδου τότε ἡ μὲν κορυφαία του προβολὴ εἶναι αὐτὸ τοῦτο τὸ σημεῖον Α, ἡ δὲ ὁριζόντιος προβολὴ α ἐπὶ τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους. Τὸ (σχ. 11) παριστᾷ τὸ σχέδιον ἑνὸς σημείου κειμένου ἐπὶ τοῦ κορυφαίου προβολικοῦ ἐπιπέδου.

**15.** Ὅταν ἓν σημεῖον εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους τότε ἀμφότεραι αἱ προβολαὶ τοῦ σημείου τούτου εἶναι αὐτὸ τὸ σημεῖον. Τὸ (σχ. 12) παριστᾷ τὸ σχέδιον σημείου κειμένου ἐπὶ τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους.

**16.** Συνθῆκαι ἀναφερόμεναι εἰς τὴν χάραξιν τῶν σχεδίων.— (Σχ. Α) Αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι ἢ καμπύλαι ζητήματός τινος χαράσσονται διὰ συνεχῶν γραμμῶν (α), ὅταν εὑρίσκονται πρὸ πάσης ἐπιφανείας, ἄλλως τε δι' ἐστιγμένων γραμμῶν (β). Αἱ γραμμαὶ τῆς κατασκευῆς χαράσσονται διὰ διακεκομμένων γραμμῶν (γ), αἱ δὲ βοηθητικαὶ διὰ διακεκομμένων μετὰ στιγμῶν.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II.

### ΠΕΡΙ ΕΥΘΕΙΑΣ

**17.** Προβολαὶ τῆς εὐθείας.—Καλεῖται προβολὴ μιᾶς εὐθείας ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου ἡ γραμμὴ ἥτις ἑνώνει ἁπάσας τὰς προβολὰς τῶν διαφόρων σημείων τῆς εὐθείας ταύτης ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου.

Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ (σχ. 13) καὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ καταβιβάζομεν ἐκ τῶν διαφόρων σημείων τῆς ΑΒ καθέτους τῷ ἐπιπέδῳ ΜΝ, ἡ γραμμὴ αβ ἥτις διέρχεται διὰ τῶν προβολῶν τῶν διαφόρων τούτων σημείων τῆς ΑΒ εἶναι ἡ προβολὴ τῆς ΑΒ ἥτις εἶναι εὐθεῖα γραμμή.

Τὸ σύνολον τῶν καθέτων τούτων γραμμῶν σχηματίζει ἓν ἐπίπεδον ὅπερ εἶναι κάθετον εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ καὶ ὅπερ προβάλλον ἐπίπεδον καλεῖται· ἡ αβ εἶναι ἡ τομὴ τοῦ ἐπιπέδου τούτου μετὰ τοῦ ΜΝ.

Διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὴν προβολὴν τῆς **ΑΒ** ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν τὰς προβολὰς τῶν ἄκρων Α καὶ Β, α καὶ β· καὶ νὰ ἑνώσωμεν ταῦτα διὰ τῆς εὐθείας **αβ**.

**18.** Μία προβολὴ μιᾶς εὐθείας δὲν ἀρκεῖ διὰ νὰ προσδιορίσῃ ἀκριβῶς τὴν θέσιν τῆς εὐθείας τοῦ διαστήματος, καθόσον ἐὰν λάβωμεν τὴν αβ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ (σχ. 14) ὡς προβολὴν εὐθείας τινὸς τοῦ διαστήματος· ἡ αβ μᾶς δίδει τὴν ἔννοιαν τοῦ ὑψουμένου ἐπιπέδου καθέτως διὰ τῆς αβ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ· ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου δὲ τούτου ΑΒαβ δύνανται νὰ χαραχθῶσιν ἄπειραι εὐθεῖαι τῶν ὁποίων αἱ προβολαί των ἐπὶ τοῦ ΜΝ εἶναι ἡ αβ.

**19.** Διὰ νὰ προσδιορισθῇ μία εὐθεῖα διὰ τῶν προβολῶν της προβάλλομεν ταύτην ἐπ' ἀμφοτέρων τῶν προβολικῶν ἐπιπέδων. Ἔστω ἡ εὐθεῖα (σχ. 15) ΑΒ. Διὰ νὰ λάβωμεν τὴν ὁριζόντιον προβολήν της, εὑρίσκομεν τας ὁριζοντίους προβολὰς τῶν ἄκρων της Α καὶ Β αἵτινες εἶναι τὰ α καὶ β καὶ ἑνώνομεν ταῦτα διὰ τῆς αβ. Ὁμοίως διὰ νὰ λάβωμεν τὴν κορυφαίαν της προβολὴν εὑρίσκομεν τὰς κορυφαίας προβολὰς τῶν αὐτῶν σημείων αἵτινες εἶναι τὰ α' καὶ β' καὶ ἑνώνομεν ταῦτα διὰ τῆς **α'β'**. αβ, α'β' εἶναι λοιπὸν αἱ προβολαὶ τῆς εὐθείας ΑΒ· δοθέντων τούτων ἡ εὐθεῖα τοῦ διαστήματος εἶναι προσδιορισμένη διότι ἐὰν φαντασθῶμεν τὰ κάθετα ἐπίπεδα ἐπὶ τῶν προβολικῶν τὰ διερχόμενα διὰ τῶν γραμμῶν τούτων αβ καὶ α'β', ταῦτα τεμνόμενα θὰ μᾶς δόσωσι τὴν θέσιν τῆς εὐθείας εἰς τὸ διάστημα. Τὸ (σχ. 16) παριστᾷ τὸ σχέδιον μιᾶς εὐθείας οἱασδήποτε εἰς τὸ διάστημα.

**20.** Προβολαὶ εὐθείας παραλλήλου τοῦ ὁριζοντίου.— Ὅταν μία εὐθεῖα εἶναι παράλληλος τοῦ ὁριζοντίου προβολικοῦ ἐπιπέδου τότε ἡ μὲν ὁριζόντιος προβολή της εἶναι παράλληλος πρὸς ταύτην ἡ δὲ κορυφαία προβολή της παράλληλος τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους.

Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ (σχ. 17) παράλληλος τοῦ ὁριζοντίου αἱ προβολαὶ ταύτης εἶναι αἱ αβ, α'β'. Ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι παράλληλος τοῦ ὁριζοντίου αἱ προβάλλουσαι Αα καὶ Ββ εἶναι ἴσαι, ἑπομένως τὸ σχῆμα ΑΒαβ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ ἡ αβ ἴση καὶ παράλληλος τῆς ΑΒ. Ἐπειδὴ αἱ προβάλλουσαι Αα καὶ Ββ εἶναι ἴσαι καὶ αἱ εὐθεῖαι α'ο καὶ β'φ θὰ εἶναι ἴσαι καὶ ἑπομένως ἡ α'β' θὰ εἶναι παράλληλος τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους.

Τὸ (σχ. 18) παριστᾷ τὸ σχέδιον μιᾶς εὐθείας παραλλήλου τοῦ ὁριζοντίου προβολικοῦ ἐπιπέδου.

**21.** Προβολαὶ εὐθείας παραλλήλου τοῦ κορυφαίου.— Ὅταν μία εὐθεῖα εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ κορυφαῖον προβολικὸν τότε ἡ μὲν κορυφαία της προβολὴ εἶναι παράλληλος πρὸς ταύτην ἡ δὲ ὁριζόντιος προβολή της παράλληλος τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους.

Ἔστω ἡ εὐθεία ΑΒ (σχ. 19) παράλληλος τοῦ κορυφαίου· αἱ προβολαί της εἶναι **αβ, α'β'**. Ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι παράλληλος τοῦ κορυφαίου αί προβάλουσαι Αα' καὶ Ββ' εἶναι ἴσαι ἐπομένως τὸ σχῆμα ΑΒ α'β' εἶναι ὀρθογώνιον καὶ ἡ α'β' ἴση καὶ παράλληλος τῆς ΑΒ. Ἐπειδὴ αἱ προβάλουσαι Αα' καὶΒβ' εἶναι ἴσαι καὶ αἱ εὐθεῖαι αο καὶ βφ θὰ εἶναι ἴσαι ἐπομένως ἡ αβ παράλληλος τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους.

Τὸ (σχ. 20) παριστᾷ τὸ σχέδιον μιᾶς εὐθείας παραλλήλου τοῦ κορυφαίου προβολικοῦ ἐπιπέδου.

**22.** Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγωμεν ὅτι ὅταν μία εὐθεῖα εἶναι παράλληλος πρὸς ἓν τῶν προβολικῶν τότε ἡ εὐθεῖα αὕτη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου προβάλλεται μὲ τὸ ἀληθές της μέγεθος.

**23.** Προβολαὶ εὐθείας παραλλήλου τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους.—Ὅταν μία εὐθεῖα εἶναι παράλληλος τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους αἱ προβολαὶ ταύτης εἶναι παράλληλοι τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους.

Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ (σχ. 21) παράλληλος τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους τουτέστιν παράλληλος εἰς ἀμφότερα τὰ προβολικά· αἱ προβολαί της εἶναι αἱ αβ, α'β'. Ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὰ προβολικὰ ἑκάστη προβολὴ θὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν εὐθεῖαν τοῦ διαστήματος ἡ δὲ ἑτέρα παράλληλος τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους ἄρα ἀμφότεραι θὰ εἶναι παράλληλοι τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους.

**24.** Προβολαὶ εὐθείας καθέτου εἰς τὸ ὁριζόντιον. — Ὅταν μία εὐθεῖα εἶναι κάθετος εἰς τὸ ὁριζόντιον τότε ἡ μὲν ὁριζόντιος προβολή της εἶναι ἓν σημεῖον ἡ δὲ κορυφαία της κάθετος εἰς τὴν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους.

Ἔστω ἡ κατακόρυφος ΑΒ (σχ. 23) ἡ ὁριζόντιος προβολή της εἶναι τὸ σημεῖον αβ ἡ δὲ κορυφαία της ἡ α'β'. Ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι κατακόρυφος ὅλαι αἱ προβολαὶ τῶν σημείων της συμπίπτουσι εἰς τὸν πόδα τῆς καθέτου Βα.

Ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι κατακόρυφος τὸ προβάλλον ταύτην ἐπὶ τοῦ κορυφαίου εἶναι κάθετον εἰς τὴν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους ἐπομένως ἡ κορυφαία της προβολὴ θὰ εἶναι ἴση πρὸς ταύτην καὶ κάθετος εἰς τὴν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους.

Τὸ (σχ. 24) παριστᾷ τὸ σχέδιον εὐθείας καθέτου εἰς τὸ ὁριζόντιον.

**25.** Προβολαὶ εὐθείας καθέτου εἰς τὸ κορυφαῖον. — Ὅταν μία εὐθεῖα εἶναι κάθετος εἰς τὸ κορυφαῖον προβολικὸν ἐπίπεδον τότε ἡ μὲν κορυφαία της προβολὴ εἶναι ἓν σημεῖον ἡ δὲ ὁριζόντιος προβολή της κάθετος εἰς τὴν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους.

Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ κάθετος εἰς τὸ κορυφαῖον (σχ. 25) ἡ κορυφαία προβολὴ τοῦ Α ὡς καὶ τοῦ Β εἶναι ὁ πούς τῆς καθέτου Βα' ἐπομένως ἡ κορυφαία της προβολὴ εἶναι τὸ σημεῖον α'β'. Ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος εἰς τὸ κορυφαῖον τὸ δὲ προβάλλον ἐπίπεδον ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ταύτην εἶναι κατακόρυφον θὰ εἶναι κάθετον εἰς τὴν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους ἐπομένως καὶ ἡ ὁριζόντιος προβολὴ τῆς ΑΒ θὰ εἶναι ἴση πρὸς ταύτην καὶ κάθετος εἰς τὴν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους.

Τὸ (σχ. 26) παριστᾶ τὸ σχέδιον εὐθείας καθέτου εἰς τὸ κορυφαῖον.

**26.** Προβολαὶ εὐθείας κειμένης ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου.— Ὅταν μία εὐθεῖα κεῖται ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου προβολικοῦ ἐπιπέδου ἡ μὲν ὁριζόντιος προβολή της εἶναι αὐτὴ ἡ εὐθεῖα ἡ δὲ κορυφαία της προβολὴ εἶναι ἐπὶ τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους.

Ἔστω ἡ ΑΒ (σχ. 27) κειμένη ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἡ ὁριζόντιος προβολή της εἶναι ἡ ΑΒ, ἡ δὲ κορυφαία της προβολὴ ἡ α′β′ ἐπὶ τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους.

Τὸ (σχ. 28) παριστᾶ τὸ σχέδιον εὐθείας κειμένης ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου.

**27.** Προβολαὶ εὐθείας κειμένης ἐπὶ τοῦ κορυφαίου.— Ὅταν μία εὐθεῖα κεῖται ἐπὶ τοῦ κορυφαίου προβολικοῦ ἐπιπέδου ἡ μὲν κορυφαία της προβολὴ εἶναι αὐτὴ ἡ εὐθεῖα ἡ δὲ ὁριζόντιος προβολή της ἐπὶ τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους.

Ἔστω ἡ ΑΒ (σχ, 29) ἐπὶ τοῦ κορυφαίου προβολικοῦ· ἡ κορυφαία της προβολὴ εἶναι ἡ ΑΒ, ἡ δὲ ὁριζόντιος προβολὴ ἡ αβ ἐπὶ τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους.

Τὸ (σχ. 30) παριστᾶ τὸ σχέδιον εὐθείας κειμένης ἐπὶ τοῦ κορυφαίου προβολικοῦ.

**28.** Προβολαὶ εὐθείας ἥτις ἔχει τὰ ἄκρα της ἐπὶ τῶν προβολικῶν.— Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ (σχ. 31) τοῦ διαστήματος ἥτις ἔχει τὸ μὲν ἄκρον της Α ἐπὶ τοῦ κορυφαίου προβολικοῦ τὸ δὲ ἕτερον ἄκρον της Β ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου προβολικοῦ· ἡ κορυφαία προβολὴ τοῦ σημείου Α εἶναι αὐτὸ τοῦτον τὸ σημεῖον ἡ δὲ ὁριζόντιος προβολή του εἶναι τὸ α ἐπὶ τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους, Ἡ ὁριζόντιος προβολὴ τοῦ σημείου Β εἶναι αὐτὸ τοῦτο, ἡ δὲ κορυφαία του προβολὴ τὸ σημεῖον β′ ἐπὶ τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους· ἐπομένως αἱ προβολαὶ τῆς ΑΒ εἶναι αΒ,Αβ′.

Τὸ (σχ. 32) παριστᾶ τὸ σχέδιον εὐθείας ἧς τὰ ἄκρα εἶναι ἐπὶ τῶν προβολικῶν.

Τὰ σημεῖα Α καὶ Β ἔνθα ἡ εὐθεῖα συναντᾶ τὰ προβολικὰ καλοῦνται περάσματα τῆς εὐθείας καὶ τὸ μὲν Α κορυφαῖον πέρασμα τὸ δὲ Β ὁριζόντιον πέρασμα.

Πρόβλημα 1.

**29.** Δίδεται μία εὐθεῖα διὰ τῶν προβολῶν της νὰ εὑρεθῶσι τὰ περάσματά της.

Ἔστω ἡ εὐθεῖα αβ,α′β′ (σχ. 33), διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὸ κορυφαῖον πέρασμα προεκτείνομεν τὴν ὁριζόντιον προβολὴν αβ μέχρις ὅτου συναντήσῃ τὴν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι ἡ ὁριζόντιος προβολὴ τοῦ κορυφαίου περάσματος· εἶτα διὰ τοῦ σημείου τούτου κ ὑψοῦμεν κάθετον εἰς τὴν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους καὶ προεκτείνομεν τὴν κορυφαίαν προβολὴν α'β' μέχρις ὅτου συναντήσῃ τὴν κάθετον ταύτην τὸ σημεῖον Κ εἶναι τὸ κορυφαῖον πέρασμα. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ὁριζοντίου περάσματος προεκτείνομεν τὴν κορυφαίαν προβολὴν α'β' μέχρις ὅτου συναντήσῃ τὴν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους, τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι ἡ κορυφαία προβολὴ τοῦ ὁριζοντίου περάσματος, εἶτα διὰ τοῦ σημείου τούτου ο' φέρομεν κάθετον εἰς τὴν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους καὶ προεκτείνομεν τὴν ὁριζόντιον προβολὴν αβ μέχρις ὅτου συναντήσῃ τὴν κάθετον ταύτην τὸ σημεῖον τοῦτο ο εἶναι τὸ ὁριζόντιον πέρασμα.

Πρόβλημα 2.

**30.** Δίδονται αἱ προβολαὶ μιᾶς εὐθείας νὰ εὑρεθῇ τὸ ἀληθές της μέγεθος.

1ον. Ἔστω ἡ εὐθεῖα αβ,α'β' (σχ. 35). Γνωρίζομεν ὅτι ἡ εὐθεῖα τοῦ διαστήματος ΑΒ εὑρίσκεται εἰς τὴν τομὴν τῶν δύο προβαλλόντων ἐπιπέδων αβΑΒ καὶ α'β'ΑΒ (σχ. 34).

Ἂς λάβωμεν τὸ προβάλον ἐπίπεδον αβΑΒ π. χ. ἡ κορυφαία προβολὴ τῆς εὐθείας μᾶς ἐπιτρέπει νὰ εὕρωμεν τὰς προβαλούσας Αα καὶ Ββ καθόσον εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς α'ο καὶ β'φ.

Ἐρκεῖ λοιπὸν πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀληθοῦς μεγέθους τῆς δοθείσης εὐθείας διὰ τῶν προβολῶν της αβ,α'β' (σχ. 35) νὰ φέρωμεν καθέτους πρὸς τὴν ὁριζόντιον προβολὴν αβ ἐκ τῶν σημείων α καὶ β καὶ νὰ λάβωμεν ταύτας τὴν μὲν $αA_1$ ἴσην πρὸς τὴν Α'ο τὴν δὲ $βB_1$ ἴσην πρὸς τὴν β'φ ἡ εὐθεῖα $A_1B_1$ εἶναι τὸ ἀληθὲς μέγεθος τῆς δοθείσης εὐθείας.

2ον. Ἔστω ἡ εὐθεῖα αβ,α'β' (σχ. 36) ἧς τὰ ἄκρα εἶναι ἐπὶ τῶν προβολικῶν· ἐκ τοῦ σημείου β φέρομεν μίαν κάθετον πρὸς τὴν αβ ἣν λαμβάνομεν ἴσην πρὸς τὴν ββ' καὶ ἑνώνομεν τὸ α μὲ τὸ $B_1$ ἡ εὐθεῖα $αB_1$ εἶναι τὸ ἀληθὲς μέγεθος τῆς δοθείσης εὐθείας.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙΙ.

### ΠΕΡΙ ΕΠΙΠΕΔΟΥ.

**31.** Παράστασις τοῦ ἐπιπέδου.— Δοθέντος ἐπιπέδου τινὸς Μ λαμβάνομεν τὰς τομὰς τούτου μετὰ τῶν προβολικῶν ἐπιπέδων· αἱ τομαὶ αὗται ΑΒ καὶ ΒΔ ὀνομάζονται ἴχνη τοῦ ἐπιπέδου, καὶ τὸ μὲν ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου κείμενον ὁριζόντιον ἴχνος τὸ δὲ ἐπὶ τοῦ κορυφαίου κορυφαῖον ἴχνος (σχ. 37). Εἰς τὴν Περιγραφικὴν Γεωμετρίαν ἓν ἐπίπεδον παρίσταται γενικῶς διὰ τῶν ἰχνῶν του.

Ἡ τομὴ τῶν δύο προβολικῶν ἐπιπέδων μετὰ τοῦ δοθέντος εἶναι ἓν σημεῖον εὑρισκόμενον ἐπὶ τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους· πρέπει λοιπὸν τὰ ἴχνη ἑνὸς ἐπιπέδου νὰ τέμνωνται εἰς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους.

Τὸ (σχ. 38) παριστᾶ τὸ σχέδιον ἑνὸς ἐπιπέδου οἱουδήποτε.

**32.** Παράστασις ἐπιπέδου παραλλήλου τοῦ ὁριζοντίου.— Ὅταν τὸ ἐπίπεδον **Μ** εἶναι ὁριζόντιον τότε ὁριζόντιον ἴχνος δὲν ὑπάρχει διότι δὲν συναντᾶ τὸ ὁριζόντιον προβολικόν, τὸ δὲ κορυφαῖον του ἴχνος ΑΒ εἶναι παράλληλον τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους (σχ. 39).

Τὸ (σχ. 40) παριστᾶ τὸ σχέδιον ἑνὸς ἐπιπέδου ὁριζοντίου.

**33.** Παράστασις ἐπιπέδου παραλλήλου τοῦ κορυφαίου.— Ὅταν τὸ ἐπίπεδον Μ (σχ. 41) εἶναι παράλληλον τοῦ κορυφαίου, κορυφαῖον ἴχνος δὲν ὑπάρχει, τὸ δὲ ὁριζόντιόν του ἴχνος ΑΒ εἶναι παράλληλον τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους.

Τὸ (σχ. 42) παριστᾶ τὸ σχέδιον ἐπιπέδου παραλλήλου τοῦ κορυφαίου.

**34.** Παράστασις ἐπιπέδου παραλλήλου τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους.— Ὅταν τὸ ἐπίπεδον Μ εἶναι παράλληλον τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους τότε δὲν θὰ τμήσῃ ταύτην ἑπομένως οὔτε τὰ ἴχνη του ΑΒ καὶ ΖΔ θὰ συναντῶσι ταύτην ἄρα θὰ εἶναι παράλληλα τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους (σχ. 43).

Τὸ (σχ. 44) παριστᾶ τὸ σχέδιον ἐπιπέδου παραλλήλου τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους.

**35.** Παράστασις ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους.— Ὅταν τὸ ἐπίπεδον Μ (σχ. 45) διέρχηται διὰ τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους τότε ἀμφότερα τὰ ἴχνη του εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους καὶ ἐπειδὴ διὰ ταύτης διέρχονται ἄπειρα ἐπίπεδα διὰ νὰ εἶναι προσδιορισμένη ἡ θέσις τοῦ ἐπιπέδου λαμβάνομεν τὰς προβολὰς ἑνὸς σημείου του Δ.

Τὸ (σχ. 46) παριστᾶ τὸ σχέδιον ἑνὸς ἐπιπέδου διερχ.μένου διὰ τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους.

**36.** Παράστασις ἐπιπέδου καθέτου εἰς τὸ ὁριζόντιον.— Ὅταν τὸ ἐπίπεδον Μ (σχ.47) εἶναι κάθετον εἰς τὸ ὁριζόντιον τότε τὸ μὲν ὁριζόντιόν του ἴχνος ΑΒ εἶναι μία γραμμὴ πλαγία ὡς πρὸς τὴν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους τὸ δὲ κορυφαῖον του ἴχνος ΒΔ εἶναι κάθετον εἰς τὴν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους.

Τὸ (σχ. 48) παριστᾶ τὸ σχέδιον ἑνὸς ἐπιπέδου καθέτου εἰς τὸ ὁριζόντιον.

**37.** Παράστασις ἐπιπέδου καθέτου εἰς τὸ κορυφαῖον.—Ὅταν τὸ ἐπίπεδον Μ (σχ. 49) εἶναι κάθετον εἰς τὸ κορυφαῖον τότε τὸ μὲν κορυφαῖον του ἴχνος ΔΒ εἶναι μία γραμμὴ πλαγία ὡς πρὸς τὴν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους τὸ δὲ ὁριζόντιόν του ἴχνος ΑΒ εἶναι κάθετον εἰς τὴν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους.

Τὸ (σχ. 50) παριστᾶ τὸ σχέδιον ἑνὸς ἐπιπέδου καθέτου εἰς τὸ κορυφαῖον.

**38.** Παράστασις ἐπιπέδου καθέτου εἰς τὴν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους.— Ὅταν ἕνα ἐπίπεδον εἶναι κάθετον εἰς τὴν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους τουτέστι κάθετον εἰς ἀμφότερα τὰ προβολικὰ τότε ἀμφότερα τὰ ἴχνη του εἶναι κάθετα εἰς τὴν γραμγὴν τοῦ ἐδάφους.

Τὸ(σχ.51)παριστᾶ ἓν ἐπίπεδον κάθετον εἰς τὴν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους.

**39.** Ὅταν μία εὐθεῖα εὑρίσκεται ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου τότε τὰ περάσματα τῆς εὐθείας εὑρίσκονται ἐπὶ τῶν ἰχνῶν τοῦ ἐπιπέδου.

Τὸ (σχ. 52) παρςστᾶ τὸ σχέδιον μιᾶς εὐθείας αϐ,α'ϐ' κειμένης ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΔ.

**40.** Ὅταν μία εὐθεῖα κεῖται ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου καὶ εἶναι ὁριζόντιος τότε το κορυφαῖον της πέρασμα εἶναι ἐπὶ τοῦ κορυφαίου ἴχνους τοῦ ἐπιπέδου· ἐπειδὴ ὁριζόντιον πέρασμα ἡ εὐθεῖα δὲν ἔχει ὡς οὖσα παράλληλος τοῦ ὁριζοντίου ἕπεται ὅτι καὶ ἡ ὁριζόντιος προβολή της δέν θὰ συναντᾶ τὸ ὁριζόντιον ἴχνος τοῦ ἐπιπέδου ἐπομένως θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τοῦτο.

Τὸ (σχ. 53) παριστᾶ τὸ σχέδιον τῆς εὐθείας αϐ,α'ϐ' παραλλήλου τοῦ ὁριζοντίου καὶ κειμένης ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΔ.

**41.** Ὅταν μία εὐθεῖα κεῖται ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου καὶ εἶναι παράλληλος τοῦ κορυφαίου προβολικοῦ τότε τὸ μὲν ὁριζόντιόν της πέρασμα εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἴχνους τοῦ ἐπιπέδου ἡ δὲ κορυφαία της προβολὴ εἶναι παράλληλος τοῦ κορυφαίου ἴχνους τοῦ ἐπιπέδου.

Τὸ (σχ. 54) παριστᾶ τὸ σχέδιον τῆς εὐθείας αϐ,α'ϐ' παραλλήλου τοῦ κορυφαίου καὶ κειμένης ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου αΒΔ.

**42.** Ὅταν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται αἱ προβολαὶ τοῦ σημείου τῆς τομῆς των εὑρίσκονται ἐπὶ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς καθέτου πρὸς τὴν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους.

Τὸ (σχ. 55) παριστᾶ τὰς προβολὰς δύο εὐθειῶν τεμνομένων.

**43.** Ὅταν δύο εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι καὶ αἱ προβολαί των εἶναι παράλληλοι.

Τὸ (σχ. 56) παριστᾶ προβολὰς εὐθειῶν παραλλήλων.

Πρόϐλημα 3 (σχ. 56 δίς).

**44.** Νὰ προσδιορισθῶσι τὰ ἴχνη τοῦ ἐπιπέδου τοῦ διερχομενου δια δύο εὐθειῶν τεμνομένων.

Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι αβ, α'β' καὶ γδ, γ'δ' προσδιορίζομεν τὰ ὁριζόντια περάσματα τῶν εὐθειῶν τούτων εἶναι δὲ ταῦτα τὰ Ο καὶ $O_1$ ἐπειδὴ ταῦτα εὑρίσκονται ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἴχνους τοῦ ἐπιπέδου φέρομεν τὴν εὐθεῖαν $OO_1$ ἥτις εἶναι τὸ ὁριζόντιον ἴχνος τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου. Τὸ κορυφαῖον ἴχνος τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου θὰ διέλθῃ διὰ τῶν κορυφαίων περασμάτων Κ καὶ $K_1$ τῶν δοθέντων εὐθειῶν.

Τὸ ὁριζόντιον ἴχνος ὡς καὶ τὸ κορυφαῖον πρέπει νὰ συναντῶνται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους.

Πρόβλημα 4 (σχ. 57).

**45.** Νὰ εὑρεθῇ ἡ τομὴ δύο ἐπιπέδων.

Ἔστωσαν τὰ ἐπίπεδα ΑΒΜ καὶ ΔΗΖ. Τὸ σημεῖον Κ τομὴ τῶν κορυφαίων ἰχνῶν τῶν δοθέντων ἐπιπέδων ἀνήκει εἰς ἀμφότερα τὰ ἐπίπεδα καὶ ἐπειδὴ εἶναι ἐπὶ τοῦ κορυφαίου προβολικοῦ εἶναι τὸ κορυφαῖον πέρασμα τῆς ζητουμένης τομῆς τοῦ ὁποίου ἡ ὁριζόντιος προβολὴ εἶναι τὸ κ. Τὸ σημεῖον Ο τομὴ τῶν ὁριζοντίων ἰχνῶν ἀνήκει εἰς ἀμφότερα τὰ ἐπίπεδα καὶ ἐπειδὴ εὑρίσκεται εἰς τὸ ὁριζόντιον προβολικὸν εἶναι τὸ ὁριζόντιον πέρασμα τῆς ζητουμένης τομῆς, ἡ κορυφαία του προβολὴ εἶναι τὸ ο'· ἑπομένως αἱ προβολαὶ τῆς ζητουμένης τομῆς εἶναι οκ, ο'Κ.

## Γωνία μιᾶς εὐθείας μετὰ τῶν προβολικῶν ἐπιπέδων.

**46.** Γωνία εὐθείας μεθ' ἑνὸς ἐπιπέδου εἶναι ἡ γωνία ἣν σχηματίζει ἡ εὐθεῖα μετὰ τῆς προβολῆς της ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου. Οὕτω ἡ γωνία ἣν κάμνει ἡ εὐθεῖα ΑΒ μετὰ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ (σχ. 58) εἶναι ἡ γωνία Βαβ.

**47.** Ἡ εὐθεῖα εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ὁριζόντιον προβολικόν.—Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ (σχ. 59) παράλληλος πρὸς τὸ ὁριζόντιον προβολικὸν καὶ συναντᾷ τὸ κορυφαῖον εἰς τὸ σημεῖον Β. Ἡ ὁριζόντιος προβολή της βα θὰ τέμνῃ τὴν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους εἰς β· ἡ κορυφαία της προβολὴ Βα' εἶναι παράλληλος τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους. Ἡ εὐθεῖα ΑΒ δὲν σχηματίζει οὐδεμίαν γωνίαν μετὰ τοῦ ὁριζοντίου προβολικοῦ καθόσον δὲν συναντᾷ τοῦτο, μετὰ τοῦ κορυφαίου σχηματίζει γωνίαν καὶ εἶναι ἡ ΑΒα' ἥτις εἶναι ἴση μὲ τὴν Εβα· ἑπομένως ὅταν μία εὐθεῖα εἶναι παράλληλος τοῦ ὁριζοντίου ἡ γωνία ἣν σχηματίζει ἡ ὁριζόντιος προβολή της μετὰ τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ἣν σχηματίζει ἡ εὐθεῖα τοῦ διαστήματος μετὰ τοῦ κορυφαίου προβολικοῦ εἰς τὸ σχέδιον (σχ. 60) ἡ γωνία αὕτη εἶναι ἡ Εβα.

**48.** Ἡ εὐθεῖα εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ κορυφαῖον προβολικόν.—Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ παράλληλος τοῦ κορυφαίου (σχ. 61) αἱ προβολαί της εἶναι αΒ, α'β' ἡ γωνία α'β'Ε εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν ΑΒα ἣν ποιεῖ αὕτη μετὰ τοῦ ὁριζοντίου· ἑπομένως ὅταν μία εὐθεῖα εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ κορυφαῖον προβολικὸν ἡ γωνία ἣν σχηματίζει ἡ κορυφαία της προβολὴ μετὰ τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ἣν σχηματίζει ἡ εὐθεῖα μετὰ τοῦ ὁριζοντίου προβολικοῦ. Εἰς τὸ σχέδιον (σχ. 62) ἡ γωνία αὕτη εἶναι ἡ α'β'Ε.

**49.** Ἡ εὐθεῖα εἶναι μία οἱαδήποτε. — Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ (σχ. 62) ἡ γωνία ἣν ποιεῖ μετὰ τοῦ ὁριζοντίου προβολικοῦ εἶναι ἡ ΒΑβ ἀλλ' αὕτη εἶναι μία γωνία ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ΒΑβ τοῦ ὁποίου εἶναι γνωσταὶ αἱ δύο κάθετοι πλευραὶ ἡ ὁριζόντιος προβολὴ Αβ τῆς εὐθείας καὶ ἡ προβάλλουσα Ββ τὸ κορυφαῖον πέρασμα τῆς εὐθείας ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἑπομένως δύναται νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον τοῦτο. Ἡ γωνία ἣν ποιεῖ ἡ εὐθεῖα ΑΒ μετὰ τοῦ κορυφαίου εἶναι ἡ γωνία ΑΒα' τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒα' τοῦ ὁποίου εἶναι γνωσταὶ αἱ δύο κάθετοι πλευραὶ ἡ Βα' κορυφαία προβολὴ τῆς εὐθείας καὶ ἡ Αα' ἡ προβάλλουσα τὸ ὁριζόντιον πέρασμα ἐπὶ τοῦ κορυφαίου· ἑπομένως δύναται νὰ κατασκευασθῇ.

Ἔστω λοιπὸν ὅτι ἐδόθη ἡ εὐθεῖα δια τῶν προβολῶν της αβ, α'β' (σχ. 63) διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὴν γωνίαν ἣν ποιεῖ ἡ εὐθεῖα μετὰ τοῦ ὁριζοντίου λαμβάνομεν ἓν μῆκος ἐπὶ τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους ἐκ τοῦ β τὸ β$A_1$ ἴσον πρὸς τὴν αβ καὶ ἑνώνομεν τὸ $A_1$ μὲ τὸ β' ἡ γωνία β'$A_1$β εἶναι ἡ ζητουμένη· διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὴν γωνίαν ἣν ποιεῖ ἡ εὐθεῖα μετὰ τοῦ κορυφαίου λαμβάνομεν τὸ μῆκος α'$B_1$ ἴσον πρὸς τὸ β'α' καὶ ἑνώνομεν τὸ $B_1$ μὲ τὸ α ἡ γωνία α$B_1$α' εἶναι ἡ ζητουμένη.

## Γωνίαι δύο εὐθειῶν.

**50.** Αἱ δύο πλευραὶ τῆς γωνίας εἶναι παράλληλοι πρὸς τὸ κορυφαῖον προβολικόν. Ἔστω ἡ γωνία Α. (σχ. 64) αὕτη προσβάλλεται ἐπὶ μὲν τοῦ ὁριζοντίου προβολικοῦ ἐπιπέδου ἐπὶ τοῦ ἴχνους της βγ, ὅπερ εἶναι παράλληλον τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους ἐπὶ δὲ τοῦ κορυφαίου εἰς β'α'γ' μὲ τὸ ἀληθές της μέγεθος.

Τὸ (σχ. 65) παριστᾷ τὸ σχέδιον τῆς γωνίας ταύτης καὶ ἡ γωνία β'α'γ' εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν τῶν δύο εὐθειῶν τοῦ διαστήματος.

**51.** Ἐὰν αἱ πλευραὶ τῆς γωνίας εἶναι παράλληλοι πρὸς τὸ ὁριζόντιον τότε ἡ γωνία ἣν σχηματίζωσι αἱ ὁριζόντιαι προβολαὶ τῶν πλευρῶν εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν τοῦ διαστήματος.

Τὸ (σχ. 66) παριστᾷ προβολὰς μιᾶς γωνίας ἥτις ἔχει τὰς πλευρὰς της παραλλήλους τοῦ ὁριζοντίου προβολικοῦ ἡ γωνία βαγ εἶναι ἴση μ τὴν γωνίαν τοῦ διαστήματος.

**52.** Αἱ πλευραὶ τῆς γωνίας εἶναι πλάγιαι ὡς πρὸς τὰ προβολικά.—Ἔστω ἡ γωνία Α (σχ. 67) τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ εἶναι πλάγιαι ὡς πρὸς τὰ προβολικὰ καὶ τῶν ὁποίων τὰ ὁριζόντια περάσματα εἶναι τὸ β καὶ γ ἔστω βγ τὸ ὁριζόντιον ἴχνος τοῦ ἐπιπέδου τῆς γωνίας. βαγ εἶναι ἡ ὁριζόντιος προβολὴ τῆς γωνίας καὶ β΄α΄γ΄ ἡ κορυφαία προβολὴ τῆς γωνίας. Ἐκ τοῦ σημείου Α φέρομεν μίαν κάθετον εἰς τὸ ἴχνος βγ τὴν Αο, ἡ ὁριζόντιος προβολὴ ταύτης εἶναι ἡ αο κάθετος πρὸς τὸ ἴχνος βγ. Κατακλίνομεν τὴν γωνίαν βΑγ ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου προβολικοῦ ἐπιπέδου ἡ κορυφὴ Α τῆς δοθείσης γωνίας κατὰ τὴν κατάκλισιν θὰ ἐξακολουθῇ νὰ εὑρίσκεται πάντοτε ἐπὶ τῆς οΑ ἥτις θὰ μένῃ κάθετος ἐπὶ τῆς βγ ἄρα θὰ κατοκλιθῇ ἐπὶ τῆς οα καὶ εἰς ἀπόστασιν ἐκ τοῦ ο ἴση πρὸς τὴν οΑ, $A_1$ εἶναι λοιπὸν ἡ κατάκλισις τοῦ Α καὶ ἡ γωνία β$A_1$γ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βΑΓ. Ἡ πλευρὰ Αο δύναται νὰ κατασκευασθῇ διότι εἶναι ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου τοῦ ὁποίου εἶναι γνωσταὶ αἱ δύο κάθετοι πλευραὶ ἡ οα καὶ Αα ἥτις εἶναι ἴση πρὸς τὴν α΄φ ἀπόστασιν τῆς κορυφαίας προβολῆς τοῦ Α ἐκ τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους.

Ἔστωσαν αἱ προβολαὶ βαγ, β΄α΄γ΄ μιᾶς γωνίας (σχ. 68) φέρομεν τὸ ὁριζόντιον ἴχνος βγ τῆς γωνίας ταύτης καὶ ἐκ τοῦ α φέρομεν τὴν κάθετον αο ἐπὶ τῆς βγ λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους τὸ μῆκος φδ ἴσον πρὸς τὴν αο καὶ ἑνώνομεν τὸ δ μὲ τὸ α΄ ἡ α΄ δ εἶναι ἴσην πρὸς τὴν ἀπόστασιν τῆς κορυφῆς Α ἀπὸ τοῦ ὁριζοντίου ἴχνους τῆς γωνίας λαμβάνομεν τὴν ο$A_1$ ἴση τῇ α΄δ καὶ τὸ σημεῖον $A_1$ εἶναι ἡ κατάκλισις τοῦ Α ἡ δὲ γωνία β$A_1$γ ἡ ζητουμένη.

## Γωνίαι ἑνὸς ἐπιπέδου μετὰ τῶν προβολικῶν.

**53.** Ὅταν δύο ἐπίπεδα τέμνονται, σχηματίζουσι μίαν δίεδρον γωνίαν ἐὰν ἐξ ἑνὸς σημείου τῆς κόψεως τῆς διέδρου γωνίας ἔξωμεν καθέτους πρὸς ταύτην ἐφ' ἑκάστου ἐπιπέδου σχηματίζεται μία ἐπίπεδος γωνία ἥτις μετρεῖ τὴν δίεδρον.

**54.** Τὸ δοθὲν ἐπίπεδον εἶναι κάθετον εἰς τὸ ὁριζόντιον προβολικόν.—Ἔστω τὸ ἐπίπεδον Μ κάθετον εἰς τὸ ὁριζόντιον προβολικὸν (σχ. 69). Τὰ ἴχνη του εἶναι τὸ μὲν ὁριζόντιον ἴχνος ἡ εὐθεῖα ΑΒ πλαγία ὡς πρὸς τὴν ΓΕ τὸ δὲ κορυφαῖον του ἴχνος ἡ εὐθεῖα ΑΔ κάθετος εἰς τὴν ΓΕ· ἡ γωνία ΕΑΒ μετρεῖ τὴν δίεδρον ἣν σχηματίζει τὸ ἐπίπεδον μετὰ τοῦ κορυφαίου προβολικοῦ.

Τὸ (σχ. 70) παριστᾷ τὸ σχέδιον ἐπιπέδου καθέτου εἰς τὸ ὁριζόντιον ἡ γωνία ΒΑΕ ἣν σχηματίζει τὸ ὁριζόντιον ἴχνος μετὰ τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους εἶναι ἡ γωνία τοῦ ἐπιπέδου μετὰ τοῦ κορυφαίου προβολικοῦ.

**55.** Τὸ δοθὲν ἐπίπεδον εἶναι κάθετον εἰς τὸ κορυχαῖον.—(σχ. 71) ἡ γωνία ΔΑΕ ἣν σχηματίζει τὸ κορυφαῖον ἴχνος μετὰ τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους εἶναι ἡ γωνία τοῦ ἐπιπέδου μετὰ τοῦ ὁριζοντίου προβολικοῦ.

**56.** Τὸ δοθὲν ἐπίπεδον εἶναι ἓν οἱονδήποτε.— (σχ. 72). Ἔστω ΑΒΔ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον ἵνα εὕρωμεν τὴν γωνίαν ἣν ποιεῖ μετὰ τοῦ ὁριζοντίου προβολικοῦ ἄγομεν ἓν ἐπίπεδον ΙΜΛ κάθετον εἰς τὸ ὁριζόντιον ἴχνος ΑΒ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου, τοῦτο θὰ εἶναι κάθετον εἰς τὸ ὁριζόντιον προβολικόν. Τὸ δοθὲν ἐπίπεδον καὶ τὸ βοηθητικὸν τέμνονται κατὰ μίαν εὐθεῖαν ἧς τὰ περάσματα εἶναι Ο καὶ Κ, ἡ εὐθεῖα αὕτη κεῖται ἐπὶ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου καὶ εἶναι κάθετος εἰς τὴν κόψιν ΑΒ, τὸ ὁριζόντιον ἴχνος ΙΜ τοῦ βοηθητικοῦ ἐπιπέδου κεῖται ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου προβολικοῦ καὶ εἶναι κάθετον εἰς τὴν κόψιν ΑΒ εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον· ἡ γωνία ΚΟκ τοῦ διαστήματος εἶναι ἡ ζητουμένη πρὸς εὕρεσιν ταύτης κατακλίνομεν ἐπὶ τοῦ κορυφαίου τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο τρίγωνον ΚΟκ πέριξ τῆς Κκ. Λαμβάνομεν τὴν $κο_1$ ἴσην τῇ κο καὶ ἑνώνομεν τὸ Κ μὲ τὸ $Ο_1$ ἡ γωνία $ΚΟ_1κ$ εἶναι ἡ ζητουμένη. Δι' ἀναλόγου κατασκευῆς εὑρίσκομεν καὶ τὴν γωνίαν $Ρχ_1Π$ ἣν ποιεῖ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον μετὰ τοῦ κορυφαίου.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV.

## ΠΡΟΒΟΛΑΙ ΤΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ.

### Τετράγωνον.

**57.** Προβολαὶ ἑνὸς τετραγώνου παραλλήλου τοῦ ὁριζοντίου, μία πλευρά του εἶναι παράλληλος τοῦ κορυφαίου.— Ἔστω τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ παράλληλον τοῦ ὁριζοντίου, ἡ δὲ ΑΒ παράλληλος τοῦ κορυφαίου (σχ. 73)· ἡ κορυφαία προβολὴ τῆς ΑΒ, εἶναι ἴση καὶ παράλληλος πρὸς ταύτην ὡς καὶ πρὸς τὴν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους. Αἱ κορυφαῖαι προβολαὶ τῶν ΑΔ καὶ ΒΓ εἶναι τὰ σημεῖα α' δ' καὶ β' γ' διότι αὗται εἶναι κάθετοι εἰς τὸ κορυφαῖον· λοιπὸν ἡ κορυφαία φροβολὴ τοῦ δοθέντος τετραγώνου εἶναι ἡ β' γ' παράλληλος τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους. Ἐπειδὴ τὸ τετράγωνον εἶναι ὁριζόντιον αἱ πλευραί του θὰ προβάλλωνται ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου προβολικοῦ μὲ τὸ ἀληθές των μέγεθος.

Τὸ (σχ. 74) παριστᾷ τὸ σχέδιον ἑνὸς τετραγώνου ὁριζοντίου οὗ μία πλευρά του εἶναι παράλληλος τοῦ κορυφαίου· ἡ ὁριζόντιος προβολὴ αβγδ εἶναι ἴση πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ διαστήματος, ἡ δὲ κορυφαία προβολὴ α' β' εἶναι ἴση πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΒ τὴν παράλληλον τοῦ κορυφαίου.

**58.** Τὸ ἐπίπεδον τοῦ τετραγώνου εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ κορυφαῖον καὶ ἡ μία του πλευρὰ εἶναι παράλληλος τοῦ ὁριζοντίου (σχ. 74 δίς).— Ἡ κορυφαία προβολὴ τοῦ τετραγώνου θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ διαστήματος ἡ δὲ ὁριζόντιος προβολή του θὰ εἶναι μία γραμμὴ παράλληλος τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους καὶ ἴση πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου τὴν παράλληλον τοῦ ὁριζοντίου.

Τὸ (σχ. 75) παριστᾶ τὸ σχέδιον τοῦ τετραγώνου τούτου τοῦ ὁποίου ἡ κορυφαία προβολὴ α′ β′ γ′ δ′ ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ διαστήματος ἡ δὲ ὁριζόντιος προβολή του εἶναι ἡ γραμμὴ αβ παράλληλος τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους καὶ ἴση πρὸς τὴν ὁριζόντιον πλευρὰν τοῦ τετραγώνου.

**59.** Τὸ ἐπίπεδον τοῦ τετραγώνου εἶναι κάθετον εἰς τὸ ὁριζόντιον προβολικὸν καὶ πλάγιον ὡς πρὸς τὸ κορυφαῖον.— (Ἡ μία πλευρά του εἶναι παράλληλος τοῦ ὁριζοντίου). Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ ὁριζόντιος προβολὴ τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ εἶναι μία γραμμὴ αβ ἴση πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου καὶ πλαγία πρὸς τὴν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους, ἡ δὲ κορυφαία του προβολὴ α′ β′ γ′ δ′ εἶναι ἓν ὀρθογώνιον τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος α′ δ′ εἶναι ἴσον πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου (σχ. 76).

Τὸ (σχ. 77) παριστᾶ τὸ σχέδιον τοῦ τετραγώνου τούτου.

## Τρίγωνον.

**60.** Τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου εἶναι παράλληλον τοῦ κορυφαίου προβολικοῦ καὶ ἡ μία του πλευρὰ ὁριζόντιος· τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές — Ἡ κορυφαία προβολὴ τοῦ τριγώνου α′ β′ γ′ (σχ. 77,78) θὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ τρίγωνον τοῦ διαστήματος ἡ δὲ πλευρὰ α′ γ′ παράλληλος τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους· ἡ ὁριζόντιος προβολή του θὰ εἶναι μία γραμμὴ παράλληλος τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους καὶ ἴση πρὸς τὴν ὁριζόντιον πλευράν.

**61.** Τὸ ἐπίπεδον τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ κορυφαῖον προβολικόν, ἀλλ' αἱ πλευραί του εἶναι κεκλημέναι ὡς πρὸς τὸ ὁριζόντισν.—Τὸ τρίγωνον τοῦτο θὰ προβάλληται ἐπὶ τοῦ κορυφαίου προβολικοῦ ἐπιπέδου μὲ τὸ ἀληθές του μέγεθος εἶναι δὲ ἡ κορυφαία του προβολὴ τὸ α′ β′ γ′ τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι κεκλιμέναι ὡς πρὸς τὴν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους· ἡ ὁριζόντιος προβολὴ τοῦ τριγώνου εἶναι ἡ γραμμὴ **αγ** παράλληλος τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους. (σχ. 79).

**62.** Τὸ ἐπίπεδον τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι κάθετον εἰς τὸ κορυφαῖον καὶ πλάγιον ὡς πρὸς τὸ ὁριζόντιον, μία δὲ πλευρά του παράλληλος τοῦ κορυφαίου.— Ἡ κορυφαία προβολὴ τοῦ τριγώνου θὰ εἶναι μία γραμμὴ πλαγία ὡς πρὸς τὴν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους καὶ ἴση πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ τριγώνου τὴν παράλληλον πρὸς τὸ κορυφαῖον εἶναι δὲ αὕτη ἡ α′γ′· ἡ ὁριζόντιος προβολή του θὰ εἶναι τὸ τρίγωνον αϐγ τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ αγ εἶναι παράλληλος τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὴν προβολὴν ταύτην παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου τούτου εἶναι κάθετον εἰς τὸ κορυφαῖον ἑπομένως προβάλλεται ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου μὲ τὸ ἀληθές του μέγεθος· λαμβάνομεν λοιπὸν τὸ μέσον τῆς αγ καὶ φέρομεν τὴν κάθετον οϐ ἴσην πρὸς τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου καὶ κατασκευάζομεν τὸ τρίγωνον αϐγ (σχ. 80).

## Πολύγωνον.

**62.** Προβολαὶ ἑνὸς κανονικοῦ ἑξαγώνου τοῦ ὁποίου τὸ ἐπίπεδον εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ κορυφαῖον. — Ἐπὶ τοῦ κορυφαίου προβολικοῦ ἐπιπέδου προβάλλεται μὲν τὸ ἀληθές του μέγεθος εἶναι δὲ ἡ κορυφαία προβολὴ ἡ α′ϐ′γ′δ′ε′ζ′ ἡ ὁριζόντιος προβολή του θὰ εἶναι μία γραμμὴ παράλληλος τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους ἥτις θὰ εἶναι καὶ τὸ ἴχνος τοῦ ἐπιπέδου του (σχ. 81).

**63.** Προβολαὶ οἱουδήποτε πολυγώνου παραλλήλου τοῦ ὁριζοντίου.— Ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου προβολικοῦ ἐπιπέδου τὸ πολύγωνον τοῦτο θὰ προβάληται μὲ τὸ ἀληθές του μέγεθος εἶναι δὲ ἡ ὁριζόντιος προβολή του τὸ αϐγδεζη (σχ. 82) ἡ κορυφαία προβολὴ εἶναι μία γραμμὴ παράλληλος τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους καὶ ἥτις εἶναι καὶ τὸ κορυφαῖον ἴχνος τοῦ ἐπιπέδου του.

## Κύκλος.

**64.** Προβολαὶ κύκλου παραλλήλου πρὸς ἓν τῶν προβολικῶν ἐπιπέδων.— Ἡ προβολὴ τοῦ κύκλου πρὸς τὸ ἐπίπεδον πρὸς ὃ εἶναι παράλληλος θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὸν κύκλον ἡ ἑτέρα προβολή του θὰ εἶναι μία γραμμὴ παράλληλος πρὸς τὴν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους.

Τὸ (σχ. 83) παριστᾶ τὸ σχέδιον ἑνὸς κύκλου ὁριζοντίου τὸ δὲ (σχ. 84) ἑνὸς κύκλου παραλλήλου τοῦ κορυφαίου.

**65.** Προβολαὶ κύκλου οὗ τὸ ἐπίπεδον εἶναι κάθετον εἰς τὴν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους.— Ἀμφότεραι αἱ προβολαί του θὰ εἶναι γραμμαὶ κάθετοι εἰς τὴν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους καὶ ἴσαι πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου. Τὸ (σχ. 95) παριστᾶ τὸ σχέδιον τοῦ κύκλου τούτου.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V.

## ΠΡΟΒΟΛΑΙ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ.

### Κύβος.

**66.** Προβολαὶ ἑνός κύβου ἔχοντος μίαν ἕδραν παράλληλον πρὸς τὸ κορυφαῖον προβολικὸν καὶ ἑτέραν ὁριζόντιον.— Εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ ὁριζόντιος προβολὴ τοῦ κύβου ΑΒΓΔΕΖΗΘ θὰ ἰσοῦται μὲ τὴν ὁριζόντιον προβολὴν τῆς ἕδρας ΑΒΓΔ, ἡ δὲ κορυφαία του προβολὴ θὰ ἰσοῦται μὲ τὴν κορυφαίαν προβολὴν τῆς ἕδρας ΑΒΕΖ (σχ. 86).

Τὸ (σχ. 87) παριστᾷ τὸ σχέδιον τοῦ κύβου τούτου.

**67.** Ἀνάπτυξις τῆς ἐπιφανείας τοῦ κύβου.—Κατασκευάζομεν ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ (σχ. 88) ὅπερ λαμβάνομεν ἴσον πρὸς τὴν βάσιν τοῦ κύβου καὶ ὅπερ ἐδόθη εἰς τὸ σχέδιον τοῦ (σχ. 87) εἶτα ἐφ' ἑκάστης πλευρας τοῦ ΑΒΓΔ κατασκευάζομεν ἀνὰ ἓν τετράγωνον τὰ ΑΒΕΖ, ΒΓΖΘ, ΓΔΗΘ, ΑΔΗΘ τὰ τετράγωνα ταῦτα εἶναι αἱ παράπλευραι ἕδραι τοῦ κύβου· ἐπὶ τῆς ΗΕ κατασκευάζομεν τὸ τετράγωνον ΗΘΕΖ ὅπερ εἶναι ἡ ἄνω βάσις τοῦ κύβου καὶ ἔχομεν οὕτω τὴν ἀνάπτυξιν τῆς ἐπιφανείας τοῦ κύβου. Ἐὰν λάβωμεν φύλλον ναστοχάρτου καὶ κόψομεν τοῦτο κατὰ τὰς ἐξωτερικὰς γραμμὰς τῆς ἀναπτύξεως καὶ ὑψώσωμεν τὰ τετράγωνα ΑΒΕΖ, ΒΓΖΘ, ΓΔΗΘ, ΑΔΗΕ καθέτως ὡς πρὸς τὸ ΑΒΓΔ καὶ εἶτα καλύψωμεν διὰ τοῦ τετραγώνου ΗΘΕΖ θὰ ἔχωμεν τὸν κύβον.

**68.** Προβολαὶ κύβου τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι παραλληλος τοῦ ὁριζοντίου αἱ δὲ λοιπαὶ ἕδραι πλάγιαι ὡς πρὸς τὸ κορυφαῖον.— Ἡ ὁριζόντιος προβολὴ τοῦ κύβου θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν τοῦ κύβου εἶναι δὲ αὕτη τὸ τετράγωνον αβγδ, ἡ κορυφαία προβολή του εἶναι τὸ ὀρθογώνιον α'γ'ζ'ε' τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος α'ε' εἶναι ἴσον πρὸς τὰς κόψεις τοῦ κύβου· ἡ κάτω βάσις ΑΒΓΔ προβάλλεται ἐπὶ τοῦ κορυφαίου κατὰ τὴν α'γ' παράλληλον τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους ἡ δὲ ἄνω βάσις εζηθ κατὰ τὴν ε'ζ' παράλληλον τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους. Αἱ τέσσαρες κατακόρυφαι κόψεις προβάλλονται ἐπὶ τοῦ κορυφαίου κατὰ τὰς α'ε', δ'η', β'θ', γ'ζ' μὲ τὸ ἀληθές των μέγεθος (σχ. 89).

### Κύλινδρος.

**69.** Προβολαὶ κυλίνδρου ὀρθοῦ τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι κύκλος.— Ἐπειδὴ τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως εἶναι ὁριζόντιον ὁ κύκλος οὗτος θὰ προβάλληται ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου προβολικοῦ ἐπιπέδου μὲ τὸ ἀληθές του μέγεθος εἶναι δὲ ὁ κύκλος ο. Ἡ κορυφαία προβολὴ τοῦ κυλίνδρου εἶναι τὸ ὀρθογώνιον α'β'γ'δ' τοῦ ὁποίου τὸ μὲν ὕψος α'γ' εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου ἡ δὲ βάσις α'β' ἴση πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου (σχ. 90).

**70.** Ἀνάπτυξις κυλίνδρου.— Ἡ ἀνάπτυξις τοῦ κυλίνδρου ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου εἶναι ἓν ὀρθογώνιον τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι ἴση πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου τὸ δὲ ὕψος του ἴσον μὲ τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου.

Λαμβάνομεν λοιπὸν τὴν ΑΒ ἴσην μὲ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου (σχ. 91) καὶ ἐπὶ ταύτης κατασκευάζομεν τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ ὕψους ἴσου πρὸς τὸ τοῦ κυλίνδρου καὶ ἔχομεν οὕτω τὴν ἀνάπτυξιν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου.

Τὸ (σχ. 92) παριστᾶ τὸ σχέδιον κυλίνδρου τοῦ ὁποίου τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως εἶναι παράλληλον τοῦ κορυφαίου.

**71.** Προβολαὶ κυλίνδρου τοῦ ὁποίου ὁ ἄξων εἶναι παράλληλος της γραμμῆς τοῦ ἐδάφους.— Ὁ ἄξων τοῦ κυλίνδρου θὰ προβάληται μὲ τὸ ἀληθές του μέγεθος εἰς ἀμφότερα τὰ προβολικά, αἱ δὲ προβολαί του θὰ εἶναι παράλληλοι τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους. Ὁ κύλινδρος θὰ προβάλληται κατὰ δύο ὀρθογώνια ἴσα τῶν ὁποίων αἱ μὲν βάσεις θὰ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους καὶ ἴσαι πρὸς τὸν ἄξονα τὸ δὲ ὕψος ἴσον πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου.

Τὸ (σχ. 93) παριστᾶ τὸ σχέδιον τοῦ κυλίνδρου τούτου.

## Πρίσμα.

**72.** Προβολαὶ ἑνὸς κανονικοῦ ἑξαγώνου πρίσματος τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι παράλληλος πρὸς ἓν τῶν προβολικῶν.— Τὸ πρίσμα ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου εἰς δ ἡ βάσις τοῦ πρίσματος εἶναι παράλληλος θὰ προβάλληται μὲ τὸ ἀληθὲς μέγεθος τῆς βάσεως ἐπὶ τοῦ ἑτέρου δὲ ἐπιπέδου κατὰ ἓν ὀρθογώνιον οὗ τὸ ὕψος εἶναι ἴσον πρὸς τὰς κόψεις τοῦ πρίσματος.

Τὸ (σχ. 94) παριστᾶ τὸ σχέδιον πρίσματος οὗ ἡ βάσις εἶναι παράλληλος τοῦ κορυφαίου τὸ δὲ (σχ. 95) παριστᾶ τὸ σχέδιον πρίσματος οὗ ἡ βάσις εἶναι παράλληλος τοῦ ὁριζοντίου.

**73.** Ἀνάπτυξις τῆς ἐπιφανείας πρίσματος κανονικοῦ ἑξαγώνου.— Ἡ ἀνάπτυξις τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας ἑνὸς κανονικοῦ πρίσματος εἶναι ἓν ὀρθογώνιον τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι ἴση μὲ τὴν περίμετρον τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος, τὸ δὲ ὕψος ἴσον πρὸς τὰς κόψεις τοῦ πρίσματος. Ἵνα ἐκτελέσωμεν τὴν ἀνάπτυξιν τοῦ πρίσματος τοῦ σχ. 94

λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΑ τὰ μήκη ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ,ΔΕ,ΕΖ,ΖΑ ἴσα πρὸς τὰς πλευρὰς αβ,βγ,γδ,δε,εζ,ζη τοῦ ἑξαγώνου καὶ ἐκ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως Α,Β,Γ,Δ,Ε,Ζ,Α ὑψοῦμεν καθέτους ἃς λαμβάνομεν ἴσας πρὸς τὴν α′η′ καὶ φέρομεν τὴν ΗΚΗ καὶ ἔχομεν οὕτως τὴν ἀνάπτυξιν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ δοθέντος πρίσματος. (σχ. 96).

## Κῶνος.

**74.** Προβολαὶ κώνου ὀρθοῦ οὗ ἡ βάσις εἶναι κύκλος.— Ἡ ὁριζόντιος προβολὴ τοῦ κώνου θὰ εἶναι ἡ προβολὴ τῆς βάσεώς του ἥτις προβάλλεται μὲ τὸ ἀληθές της μέγεθος καθόσον τὸ ἐπίπεδόν της εἶναι ὁριζόντιον εἶναι δὲ ὁ κύκλος Ο (σχ. 97). Ἡ κορυφαία του προβολὴ θὰ εἶναι ἓν ἰσοσκελὲς τρίγωνον τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι ἴση πρὸς τὴν διάμετρον τῆς βάσεως τοῦ κώνου τὸ δὲ ὕψος του ἴσον πρὸς τὸ τοῦ κώνου εἶναι δὲ αὕτη τὸ α′κ′β′.

Τὸ (σχ. 98) παριστᾷ τὰς προβολὰς κώνου οὗ τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως εἶναι παράλληλον τοῦ κορυφαίου.

**75.** Ἀνάπτυξις τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου.— Ἡ ἀνάπτυξις τοῦ κώνου ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου εἶναι εἷς κυκλικὸς τομεὺς τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ἴση πρὸς τὴν γεννήτριαν τοῦ κώνου, τὸ δὲ μῆκος τοῦ τόξου ἴσον πρὸς τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως τοῦ κώνου. Ἵνα ἐκτελέσωμεν τὴν ἀνάπτυξιν τοῦ κώνου τοῦ (σχ. 97) λαμβάνομεν τὸ σημεῖον Κ (σχ. 99) ὡς κέντρον καί μὲ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὴν κ′α′ (σχ. 97) γράφομεν τόξον κύκλον, λαμβάνομεν τὸ τόξον $ΑΒΑ_1$ ἴσον πρὸς τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως καὶ φέρομεν τὰς ΚΑ καὶ $ΚΑ_1$ καὶ ἔχομεν οὕτω τὴν ἀνάπτυξιν τοῦ κώνου.

## Πυραμίς.

**76.** Προβολαὶ κανονικῆς ἑξαγώνου πυραμίδος τῆς ὁποίας ἡ βάσις εἶναι παράλληλος πρὸς ἓν τῶν προβολικῶν (σχ. 100).— Ἔστω ὅτι ἡ βάσις τῆς πυραμίδος εἶναι ὁριζόντιος· λαμβάνομεν τὰς προβολὰς κ,κ′ τῆς κορυφῆς· αἱ προβολαὶ τοῦ ὕψους εἶναι κ,κ′υ′· ἡ βάσις τῆς πυραμίδος θὰ προβληθῇ ἐπὶ μὲν τοῦ ὁριζοντίου προβολικοῦ μὲ τὸ ἀληθές της μέγεθος καὶ εἶναι ἡ προβολὴ αὕτη τὸ αβγδεζ· ἐπὶ δὲ τοῦ κορυφαίου κατὰ μίαν γραμμὴν α′δ′ ἐπὶ τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους διότι ἡ βάσις ἐλήφθη ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου· διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς προβολὰς τῶν κόψεων ἑνώνομεν τὰς προβολὰς τῆς κορυφῆς κ,κ′ μὲ τας προβολὰς τῶν κορυφῶν τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος καὶ ἔχομεν οὕτω τὰς προβολὰς ταύτης.

Τὸ (σχ.101) παριστᾷ πυραμίδα ἧς ἡ βάσις εἶναι ἐπὶ τοῦ κορυφαίου.

**77.** Προβολαὶ πυραμίδος ὀρθῆς βάσεως τετραγώνου οὗ τὸ ἐπίπεδον εἶναι κάθετον εἰς τὴν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους.— Ἔστω ὅτι μία πλευρὰ τοῦ τετραγώνου εἶναι παράλληλος τοῦ κορυφαίου, τότε εἴτε ὁριζόντιος καὶ κορυφαία προβολὴ τῆς βάσεως θὰ εἶναι μία εὐθεῖα κάθετος εἰς τὴν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους καὶ ἴση πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος εἶναι μία γραμμὴ παράλληλος τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους ἑπομένως προβάλλεται μὲ τὸ ἀληθές της μέγεθος ἐπ' ἀμφοτέρων τῶν προβολικῶν ἑπομένως αἱ προβολαὶ τῆς πυραμίδος ταύτης θὰ εἶναι δύο ἴσα ἰσοσκελῆ τρίγωνα τῶν ὁποίων αἱ μὲν βάσεις εἶναι ἴσαι πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου τὸ δὲ ὕψος ἴσον πρὸς τὸ τῆς πυραμίδος.

Τὸ (σχ. 102) δεικνύει τὸ σχέδιον.

**78.** Προβολαὶ πυραμίδος βάσεως τετραγώνου ἧς τὸ ἐπίπεδον εἶναι κάθετον εἰς τὸ κορυφαῖον.— Ἔστω ὅτι μία πλευρὰ τῆς βάσεως εἶναι παράλληλος τοῦ κορυφαίου (σχ. 103)· ἡ βάσις ἐπὶ τοῦ κορυφαίου προβολικοῦ ἐπιπέδου θὰ προβάλληται κατὰ μίαν γραμμὴν πλαγίαν ὡς πρὸς τὴν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους καὶ ἴσην πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου· ἔστω α'β' ἡ προβολὴ αὕτη· τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος εἶναι μία γραμμὴ παράλληλος τοῦ κορυφαίου ἑπομένως προβάλλεται ἐπὶ τούτου μὲ τὸ ἀληθές του μέγεθος· ἐκ τοῦ μέσου λοιπὸν τῆς α'β', φέρομεν τὴν ο'κ', ἣν λαμβάνομεν ἴσην πρὸς τὸ ὕψος της πυραμίδος καὶ ἑνώνομεν τὸ κ' μὲ τὰ α',β' καὶ ἔχομεν τὴν κορυφαίαν προβολὴν τῆς πυραμίδος.

Ἡ ὁριζόντιος προβολὴ τῆς πλευρᾶς τῆς βάσεως τῆς παραλλήλου πρὸς τὸ κορυφαῖον εἶναι ἡ αβ παράλληλος τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους αἱ κάθετοι πλευραὶ πρὸς ταύτην εἶναι ὁριζόντιοι ἑπομένως προβάλλονται ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου μὲ τὸ ἀληθές των μέγεθος ἄγομεν ἐκ τῶν α καὶ β τὰς αγ καὶ βδ καθέτους ἐπὶ τῆς αβ καὶ ἴσας πρὸς τὴν α'β', ἡ ὁριζόντιος προβολὴ τοῦ ποδὸς τοῦ ὕψους εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς καταβιβαζομένης καθέτου ἐκ τοῦ ο' πρὸς τὴν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους καὶ ἐπὶ τῆς διαγωνίου αοδ. εἶναι ἑπομένως τὸ ο ἄγομεν ἐκ τοῦ ο μίαν γραμμὴν παράλληλον τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους καὶ ἐκ τοῦ κ' μίαν κάθετον εἰς τὴν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους τὸ σημεῖον κ εἶναι ἡ ὁριζόντιος προβολὴ τῆς κορυφῆς· ἑνώνομεν τὸ κ μὲ τὰ α,β,γ,δ καὶ ἔχομεν καὶ τὴν ὁριζόντιον προβολὴν τῆς πυραμίδος.

**79.** Ἀνάπτυξις πυραμίδος κανονικῆς.— Πᾶσα κανονικὴ πυραμὶς ἐγγράφεται εἰς κῶνον, ἑπομένως ἀναπτύσσομεν τὸν περιγεγραμμένον κῶνον τῆς πυραμίδος καὶ ἐπὶ τῆς ἀναπτύξεως ταύτης χαράσσομεν τὴν ἀνάπτυξιν τῆς πυραμίδος.

Τὸ (σχ. 104) δεικνύει τὴν ἀνάπτυξιν τῆς πυραμίδος τοῦ (σχ. 100).

## Σφαῖρα.

**80.** Προβολαὶ σφαίρας.— Ἡ προβολὴ τῆς σφαίρας ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου εἶναι εἷς μέγιστος κύκλος ταύτης. Ἵνα προσδιορίσωμεν τὰς προβολὰς μιᾶς σφαίρας λαμβάνομεν τὰς προβολὰς τοῦ κέντρου ταύτης καὶ εἶτα μὲ κέντρον τὰ σημεῖα ταῦτα καὶ μὲ ἀκτῖνα ἴσην τὴν τῆς σφαίρας γράφομεν δύο κύκλους καὶ ἔχομεν οὕτω τὰς προβολὰς τῆς σφαίρας τὸ (σχ. 105) δεικνύει τοῦτο.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI.

## ΠΕΡΙ ΗΡΙΘΜΗΜΕΝΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ

**81.** Εἴπομεν ὅτι σημεῖον τι προσδιορίζεται διὰ τῆς ὁριζοντίου προβολῆς καὶ διὰ τῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου τούτου ἀπὸ τοῦ ὁριζοντίου προβολικοῦ ἐπιπέδου. Ἡ ἀπόστασις αὕτη δίδεται γραφικῶς διὰ τῆς ἀποστάσεως τῆς κορυφαίας προβολῆς ἀπὸ τῆς γραμμῆς δοῦ ἐδάφους, ἀλλὰ τοῦτο δυνάμεθα νὰ τὸ δείξωμεν καὶ δι' ἀριθμῶν.

Εἰς τὸ σύστημα τοῦτο ἓν σημεῖον εἶναι προσδιορισμένον διὰ τῆς ὁριζοντίου προβολῆς του καὶ δι' ἑνὸς ἀριθμοῦ ὅστις δίδει τὴν ἀπόστασίν του ἀπὸ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου.

**82.** Θέλομεν σημειοῖ διὰ θετικῶν ἀριθμῶν τὰ σημεῖα τὰ εὑρισκόμενα ἄνωθεν τοῦ ὁριζοντίου καὶ δι' ἀρνητικῶν τὰ κάτωθεν τούτου· τὸ σημεῖον α σχ. 106) ὅπερ ἔχει ἀριθμὸν 1,40 εἶναι ἡ ὁριζόντιος προβολὴ ἑνὸς σημείου τοῦ διαστήματος Α ὅπερ εἶναι ἄνωθεν τοῦ ὁριζοντίου προβολικοῦ ἐπιπέδου $1^{\mu},40$. Τὸ σημεῖον γ ὅπερ ἔχει ἀριθμὸν—2 εἶναι ἡ ὁριζόντιος προβολὴ ἑνὸς σημείου τοῦ διαστήματος Γ ὅπερ εἶνται κάτωθεν τοῦ ὁριζοντίου κατὰ $2^{\mu}$.

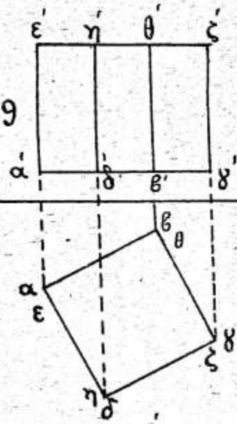
**83.** Μία εὐθεῖα εἶναι προσδιορισμένη ἢ διὰ τῶν προβολῶν της ἢ διὰ τῆς ὁριζοντίου προβολῆς της καὶ τῶν ἀριθμῶν τῶν ἄκρων της ἡ εὐθεῖα αγ εἶναι ἡ προβολὴ μιᾶς εὐθείας τῆς ὁποίας τὸ ἓν ἄκρον της Α εἶναι ἄνωθεν τοῦ ὁριζοντίου $1^{\mu},40$ (σχ. 106) τὸ δὲ ἕτερον ἄκρον τῆς κάτωθεν $2^{\mu}$.

**84.** Κλίσηις εὐθείας.— Ἡ κλίσις μιᾶς εὐθείας παρίσταται δι' ἑνὸς κλάσματος. Ἔστω ἡ εὐθεία ΑΒ (σχ. 107) ἡ προβολή της εἶναι ἡ Αϐ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Μ· ἡ ΑΒ εἶναι ἡ ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒϐ· ἐὰν ἡ πλευρὰ Βϐ εἶναι ἓν μέτρον καὶ ἡ πλευρὰ Βϐ 2 μέτρα τότε λέγομεν ὅτι ἡ κλίσις τῆς εὐθείαςεἶναι $\frac{1}{2}$ καὶ ὁ μὲν ἀριθμητὴς παριστᾷ τὸ ὕψος ὁ δὲ παρανομαστὴς τὴν βάσιν· ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τοῦ σημείου Β εἶναι $\delta^{\mu}$ καὶ ἡ κλίσις της $\frac{1}{2}$ τότε ἡ προβολὴ τῆς εὐθείας ΑΒ ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου θὰ ἔχῃ μῆκος $6^{\mu}$· ἐὰν ἡ κλίσις τῆς εὐθείας εἶναι $\frac{1}{1}$ τότε ἡ προβολὴ τῆς ΑΒ θὰ ἔχει μῆκος $3^{\mu}$ καὶ ἐὰν ἡ κλίσις τῆς εὐθείας εἶναι $\frac{3}{1}$, τότε ἡ προβολὴ τῆς ΑΒ ἔχει μῆκος $1^{\mu}$.

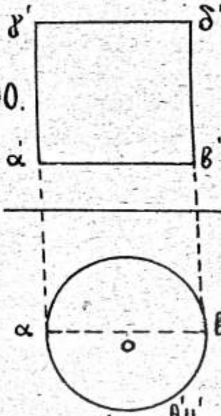
**85.** Διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὰς προβολὰς τῶν σημείων μιᾶς εὐθείας ἅτινα διαφέρουσι κατὰ μονάδα διαιροῦμεν τὴν προβολὴν εἰς τόσα ἴσα μέρη οἷος εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῆς διαφορᾶς δύο δοθέντων σημείων της π.χ. Δίδεται ἡ μν ὁ ἀριθμὸς τοῦ μ ἔστω $2^{\mu}$ καὶ ὁ τοῦ ν $6^{\mu}$ διαιροῦμεν τὸ μῆκος μν εἰς 4 ἴσα μέρη καὶ ἔχομεν τὰ σημεῖα β,γ,δ, τῶν ὁποίων οἱ ἀριθμοὶ εἶναι 3,4,5· τὸ ὁριζόντιον πέρασμα τῆς εὐθείας ἔχει ἀριθμὸν 0 διὰ νὰ τὸ προσδιορίσωμεν τοῦτο μεταφέρομεν τὸ μῆκος μβ ἀριστερὰ 2 φορὰς καὶ θὰ ἔχωμεν τὸ σημεῖον κ ὅπερ ἔχει ἀριθμὸν 0· ἐὰν τὸ μῆκος αβ εἶναι ἴσον πρὸς 2 μέτρα τότε ἡ κλίσις τῆς εὐθείας θὰ εἶναι $\frac{1}{2}$ διότι τὸ σημεῖον β εἶναι ὑψηλότερον τοῦ α $4^{\mu}$ (σχ. 106).

**86.** Ἓν ἐπίπεδον προσδιορίζεται διὰ τῶν προβολῶν τῶν πλευρῶν του καὶ διὰ τῶν ἀριθμῶν τῶν κορυφῶν του.

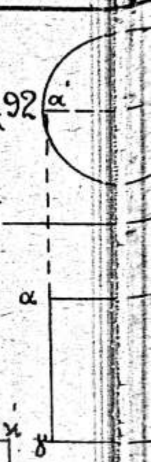
Τὸ (σχ. 108) δεικνύει τὰς προβολὰς πολυγώνου.



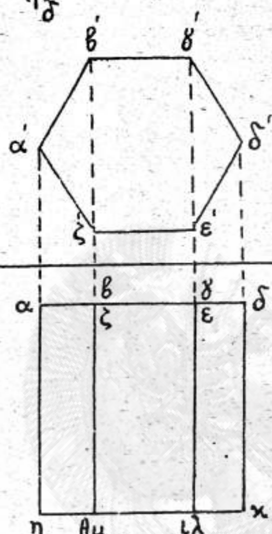
Σχ. 89



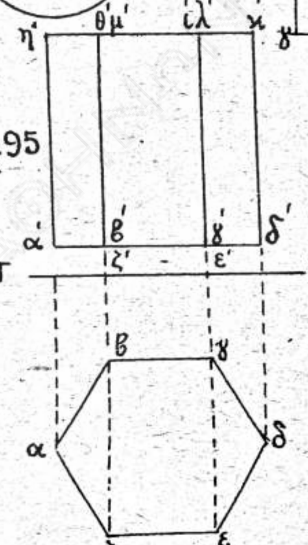
Σχ. 90.



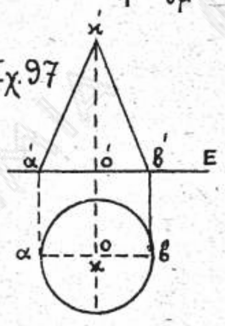
Σχ. 92



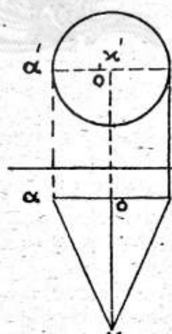
Σχ. 94



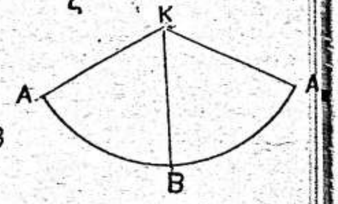
Σχ. 95



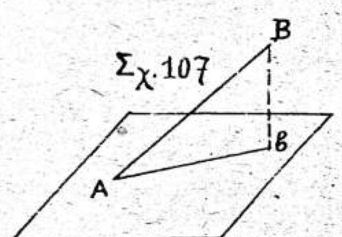
Σχ. 97



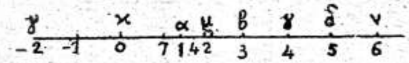
Σχ. 98



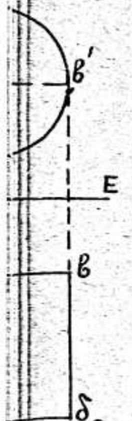
Σχ. 99

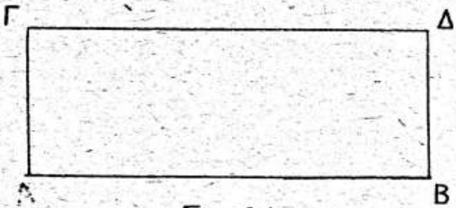


Σχ. 107



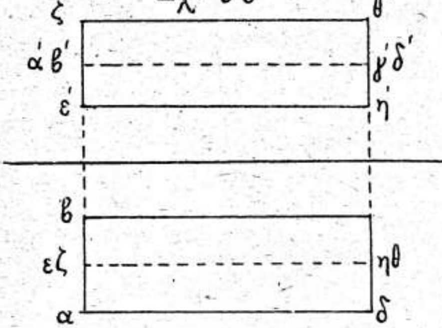
Σχ. 106



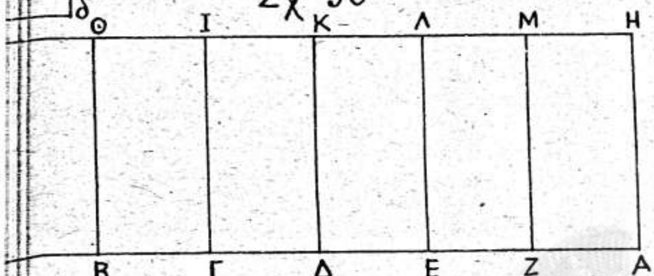




Σχ. 91

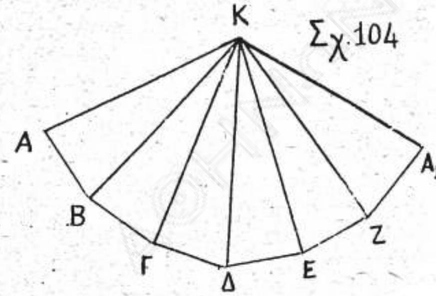
Σχ. 93



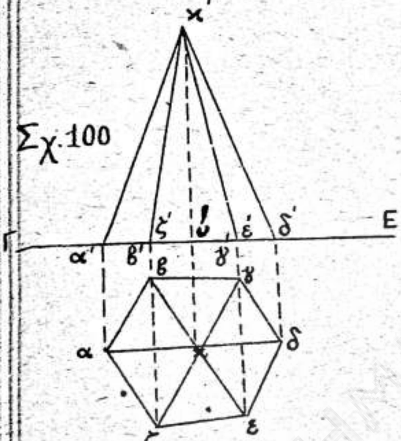

Σχ. 96



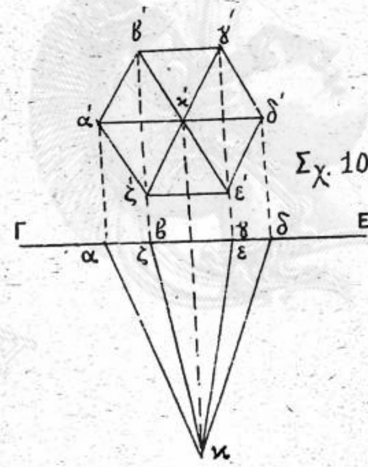

Σχ. 104



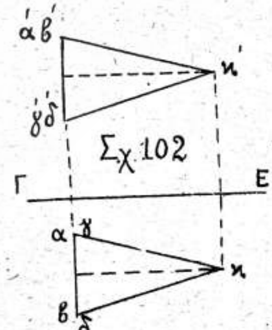

Σχ. 100



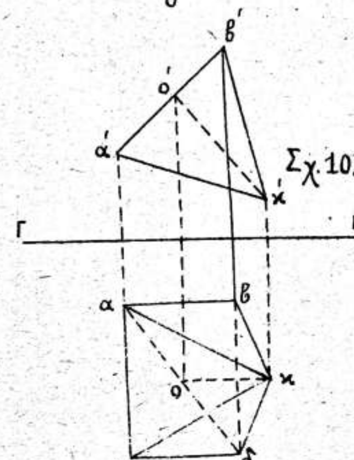

Σχ. 101



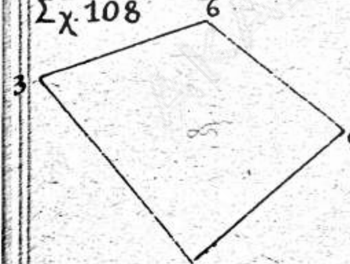

Σχ. 102



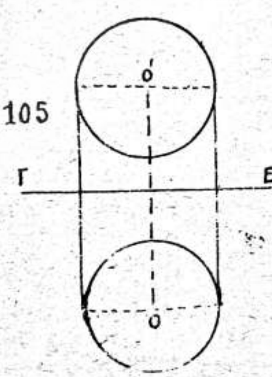

Σχ. 103

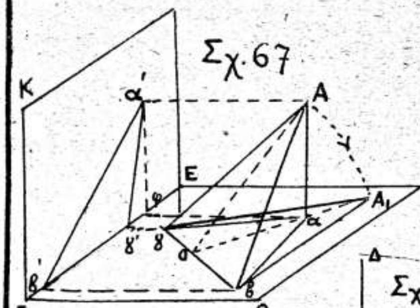



Σχ. 108

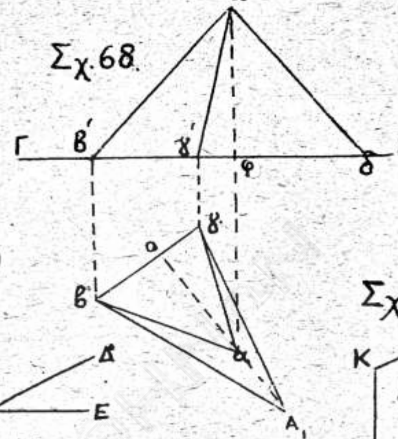



Σχ. 105

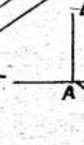




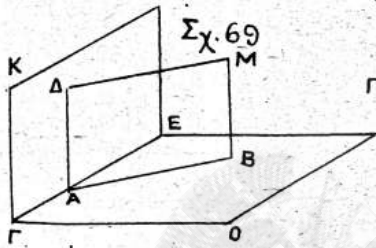
Σχ. 67



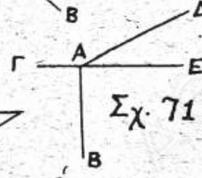
Σχ. 68



Σχ. 70

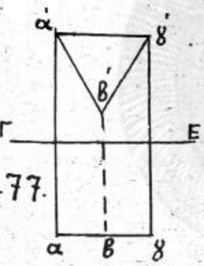


Σχ. 69

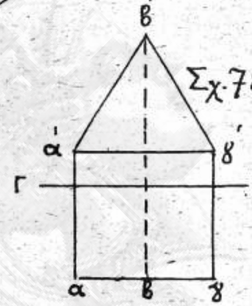


Σχ. 71

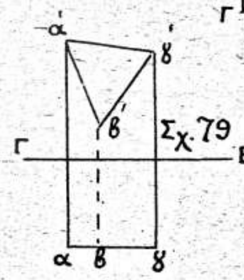
Σχ.



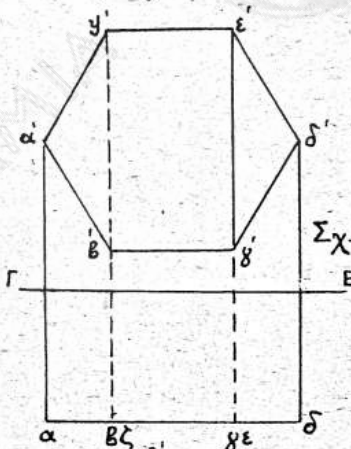
Σχ. 77.



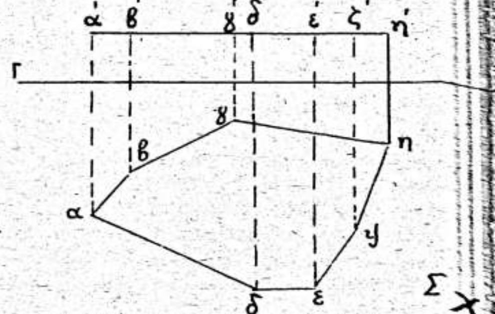
Σχ. 78

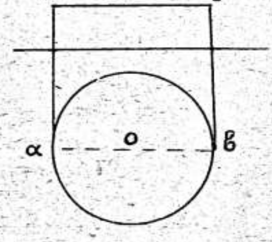


Σχ. 79



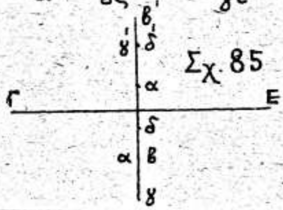
Σχ. 81





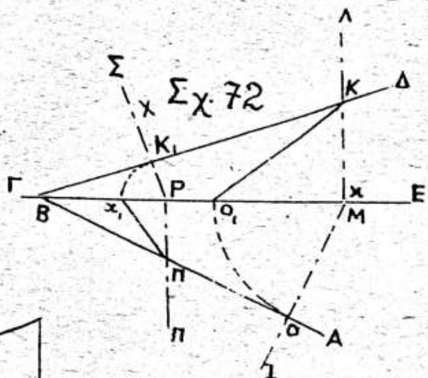
Σχ. 83

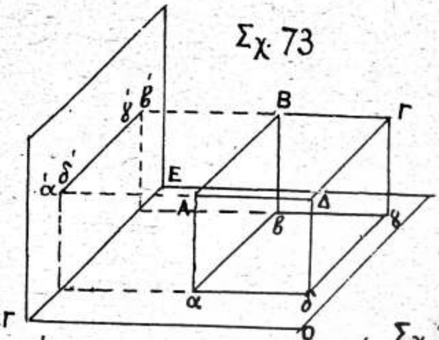
Σχ

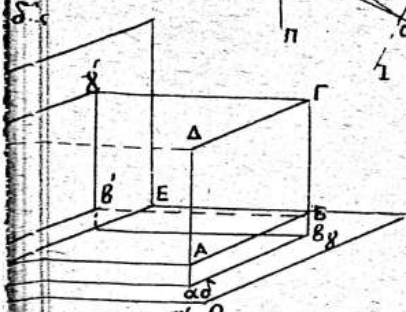


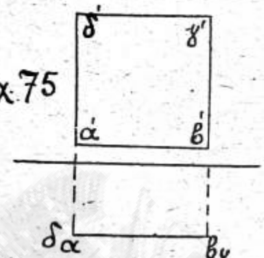
Σχ. 85

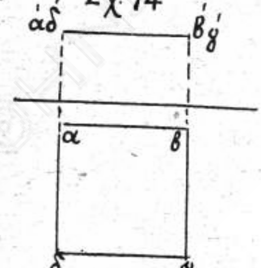
ΠΙΝΑΞ 3ος

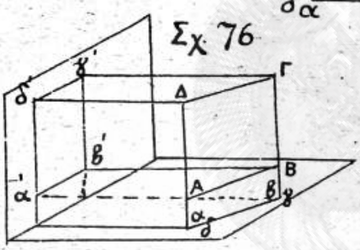

Σχ. 72

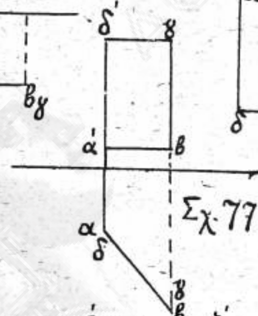

Σχ. 73

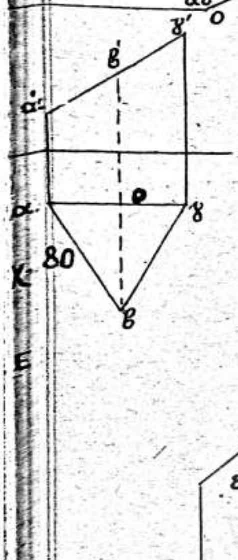


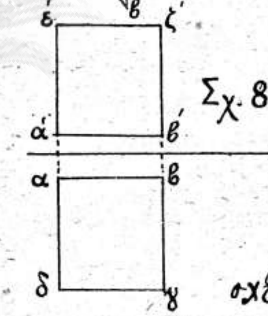

Σχ. 75

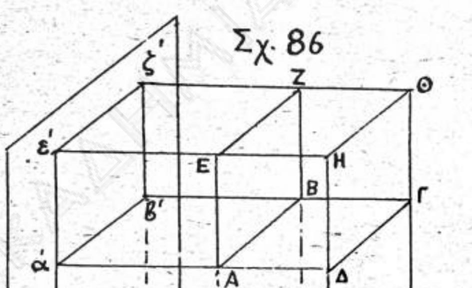

Σχ. 74

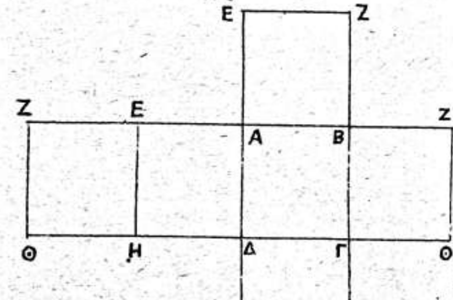

Σχ. 76

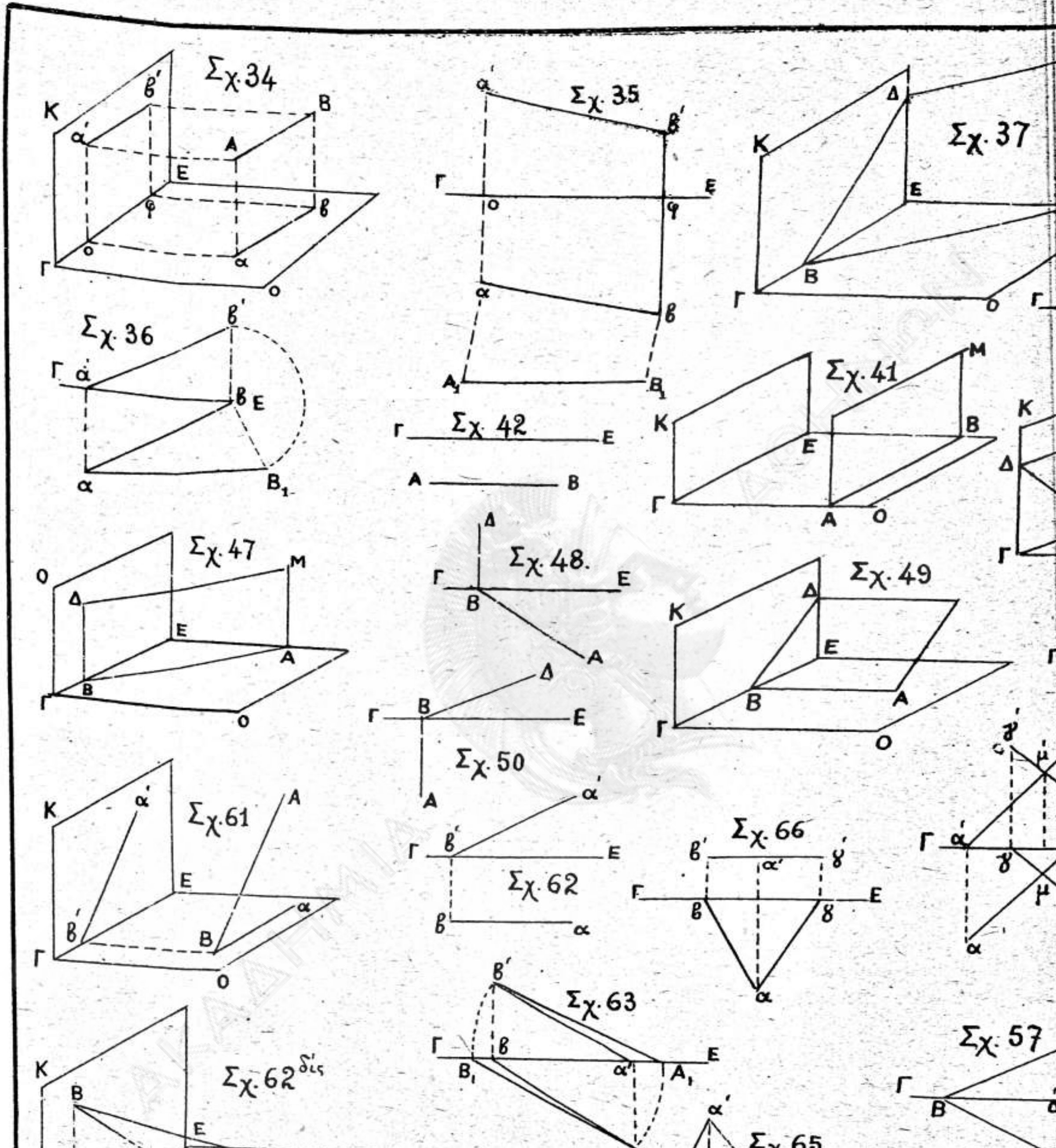

Σχ. 77


Σχ. 80


Σχ. 87

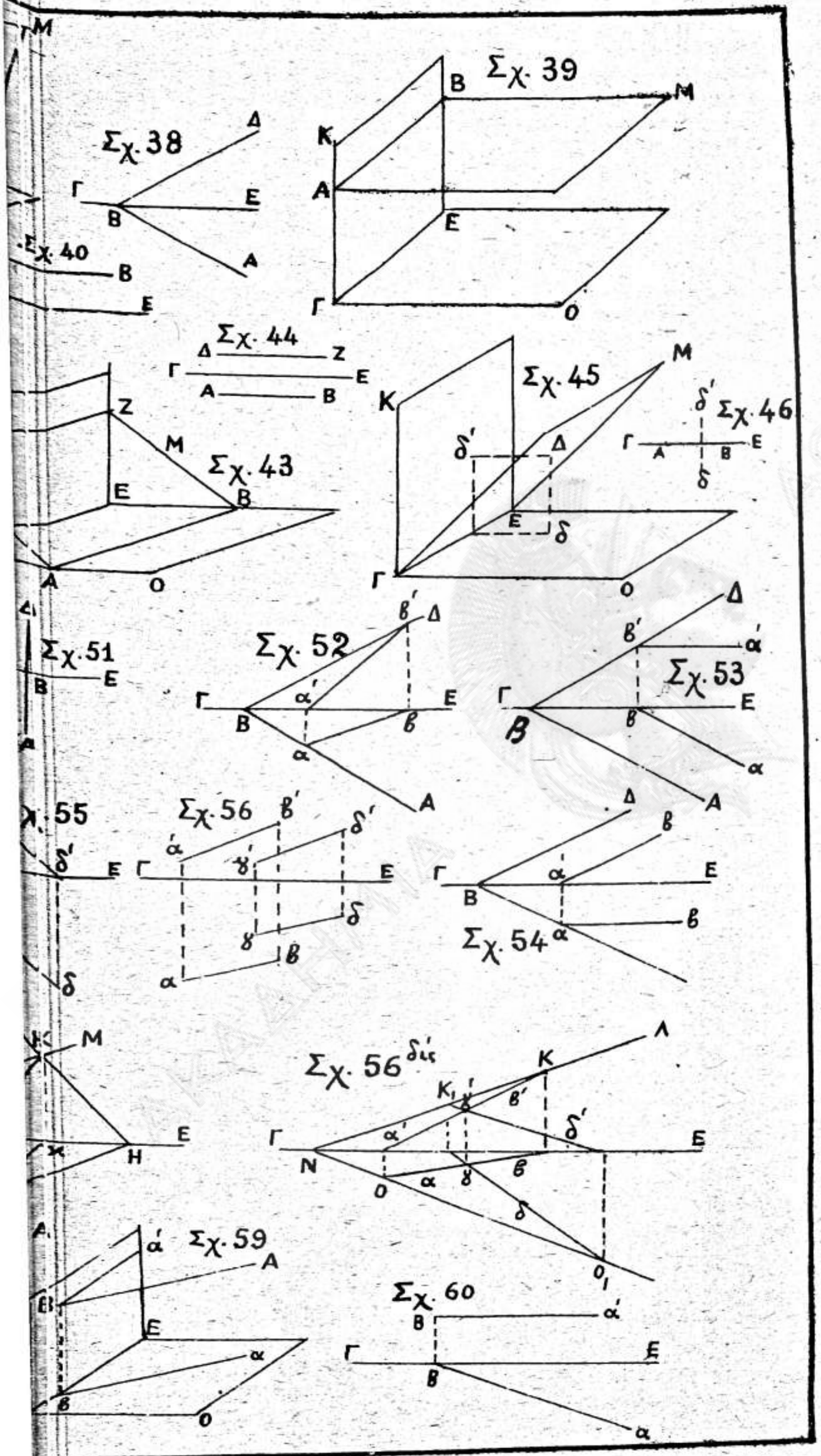

Σχ. 86

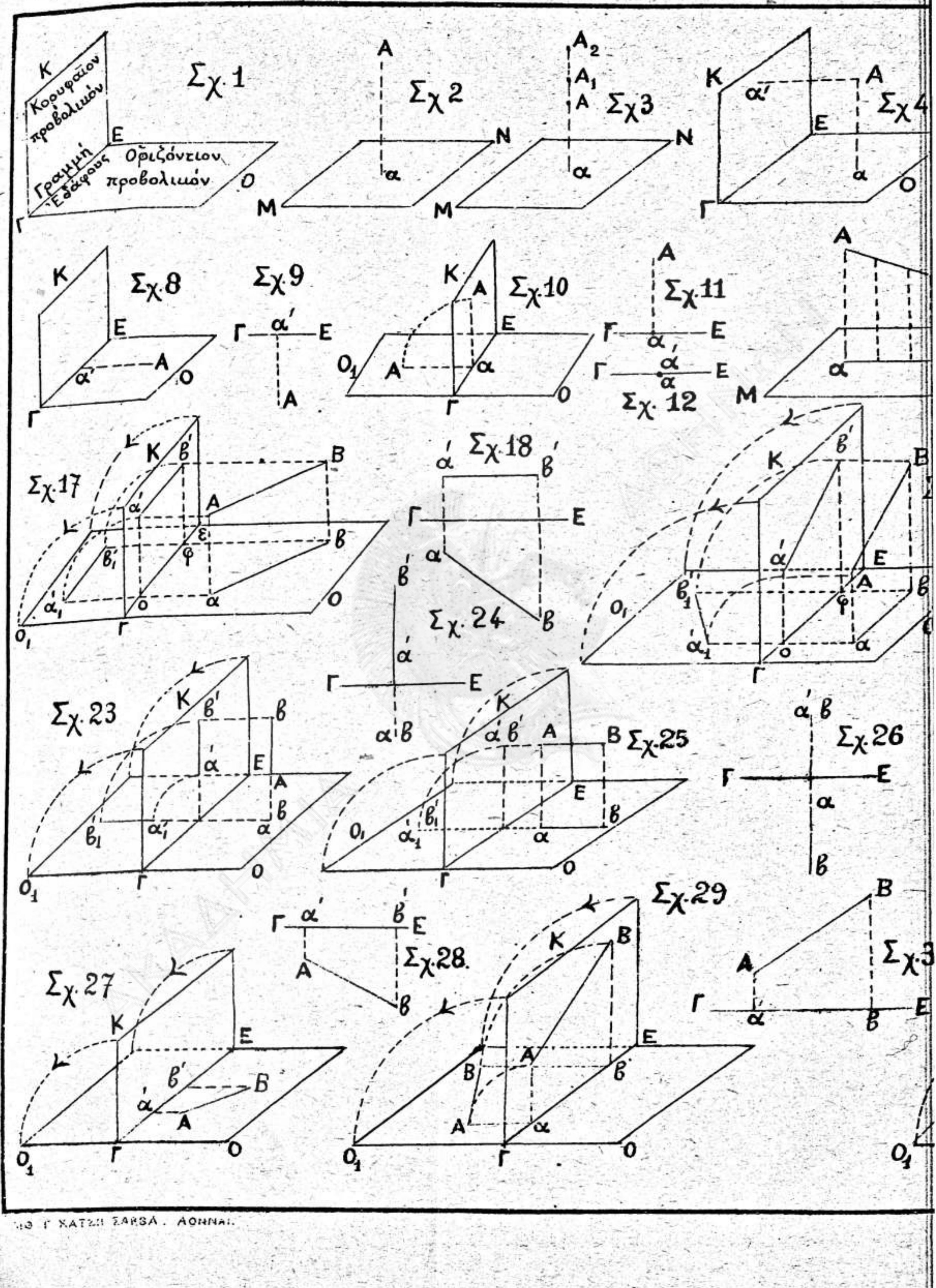

σχ 88



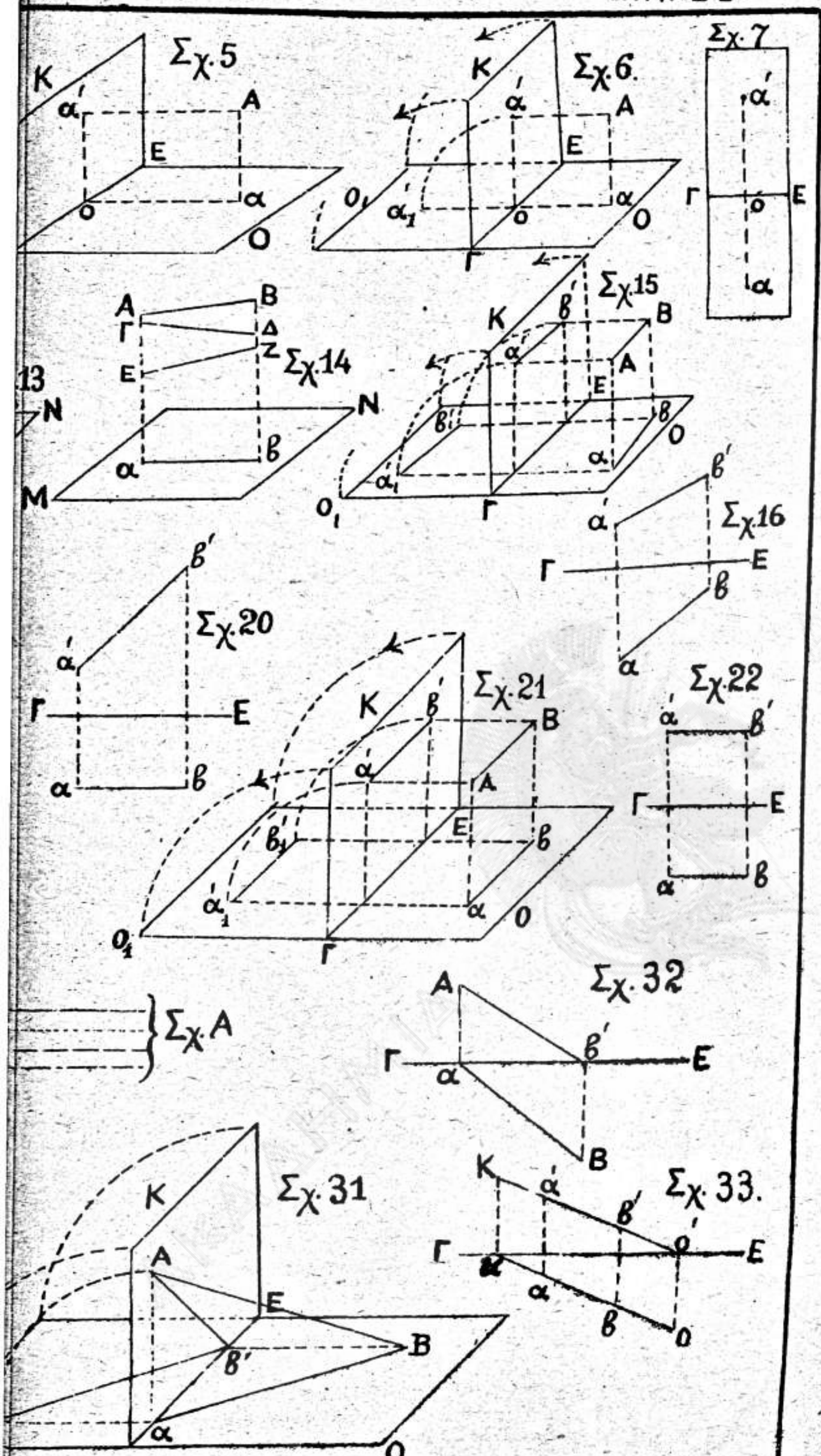
Σχ. 34
Σχ. 35
Σχ. 37
Σχ. 36
Σχ. 41
Σχ. 42
Σχ. 47
Σχ. 48.
Σχ. 49
Σχ. 50
Σχ. 61
Σχ. 62
Σχ. 66
Σχ. 63
Σχ. 57
Σχ. 62 δίς
Σχ. 65
Σχ. 64
Σχ. 58

ΠΙΝΑΞ 2ος

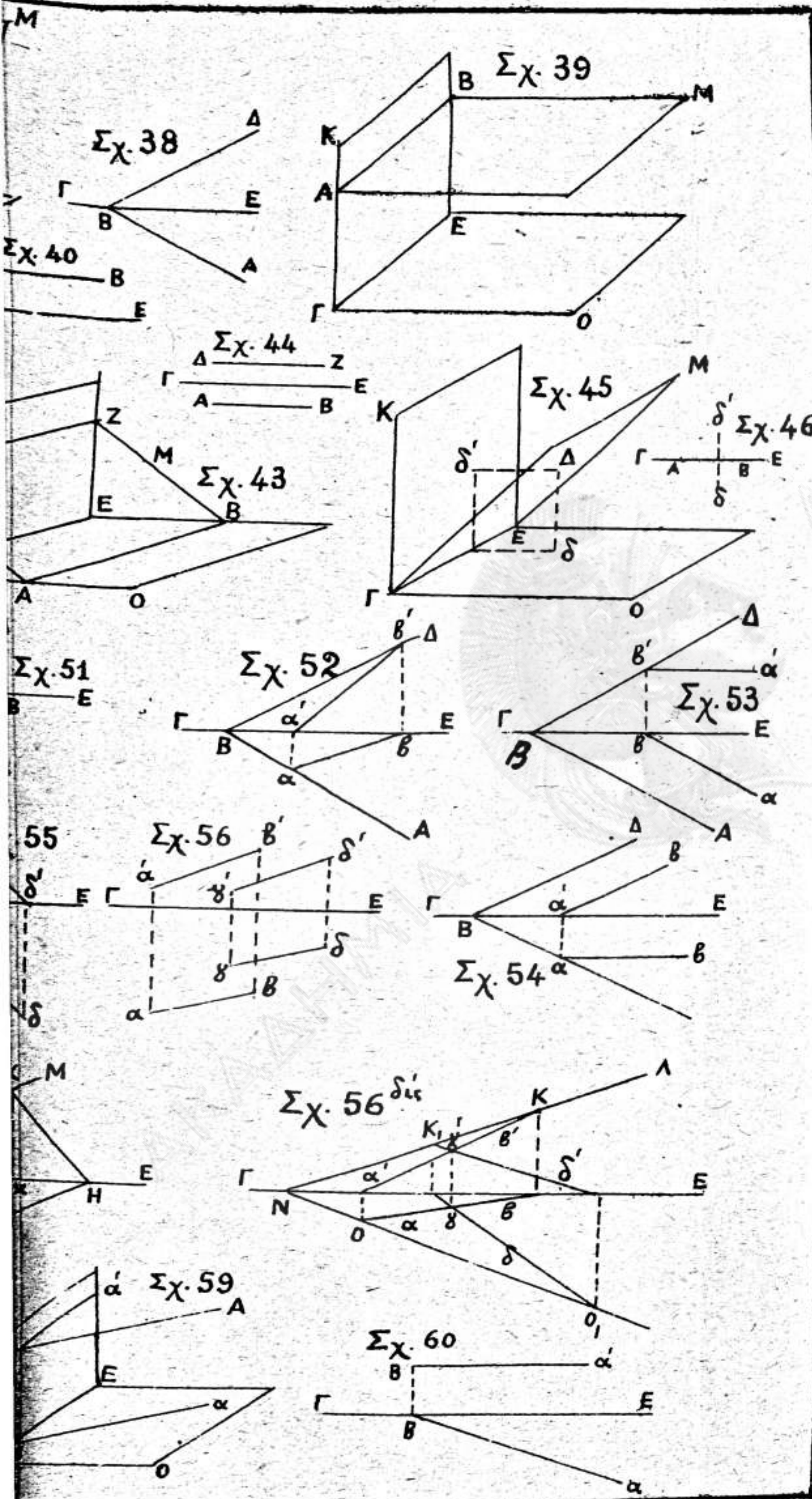

Σχ. 38
Σχ. 39
Σχ. 40
Σχ. 43
Σχ. 44
Σχ. 45
Σχ. 46
Σχ. 51
Σχ. 52
Σχ. 53
Σχ. 54
Σχ. 55
Σχ. 56
Σχ. 56 δίς
Σχ. 59
Σχ. 60

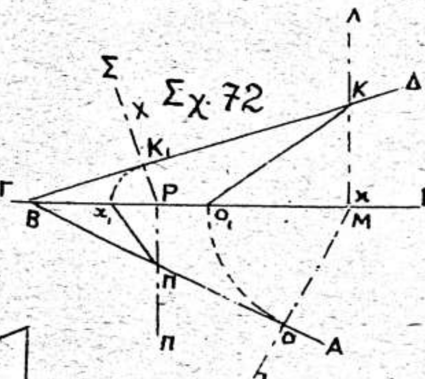



Γ. ΧΑΤΖΗ ΣΑΡΔΑ . ΑΘΗΝΑΙ

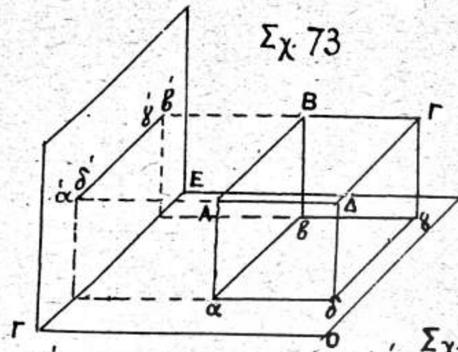

Σχ. 5
Σχ. 6.
Σχ. 7
Σχ. 14
Σχ. 15
13
Σχ. 16
Σχ. 20
Σχ. 21
Σχ. 22
Σχ. A
Σχ. 32
Σχ. 31
Σχ. 33.

ΠΙΝΑΞ 2ος

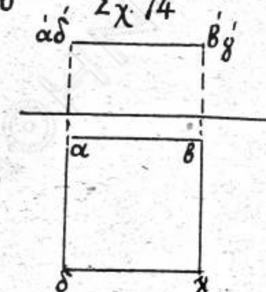

Σχ. 38
Σχ. 39
Σχ. 40
Σχ. 43
Σχ. 44
Σχ. 45
Σχ. 46
Σχ. 51
Σχ. 52
Σχ. 53
Σχ. 54
55
Σχ. 56
Σχ. 56 δίς
Σχ. 59
Σχ. 60



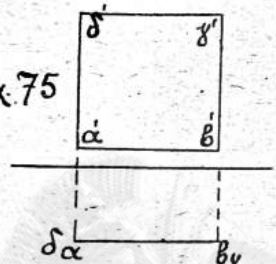

Σχ. 72



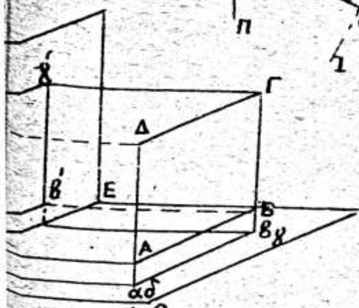

Σχ. 73

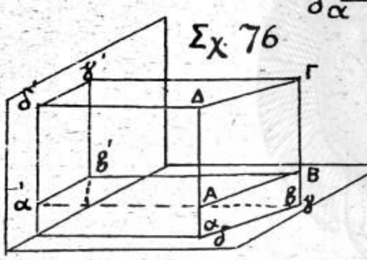



Σχ. 74

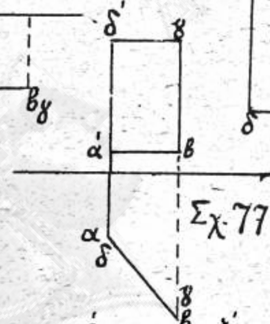



Σχ. 75

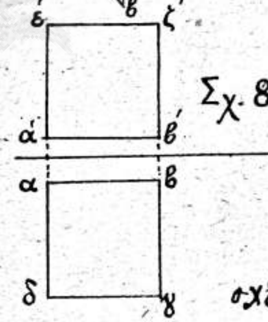


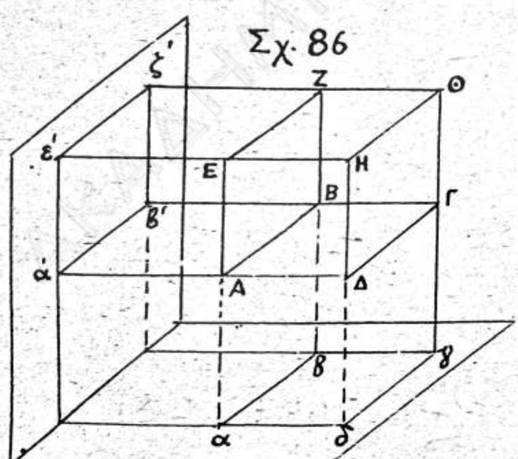

Σχ. 76




Σχ. 77

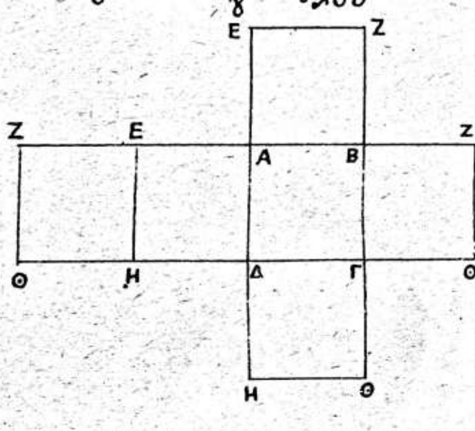


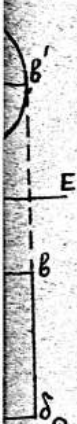

Σχ. 87

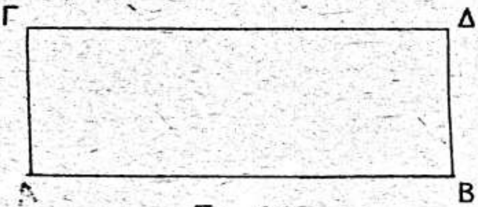



Σχ. 86

σχ 88

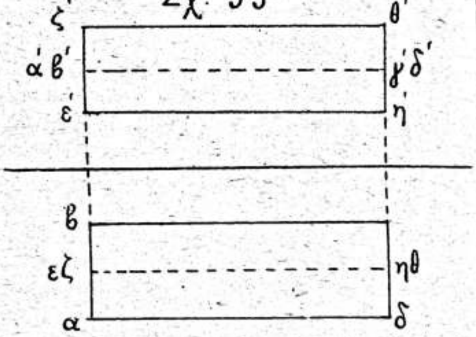




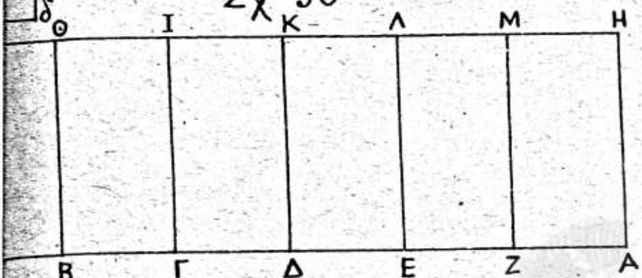



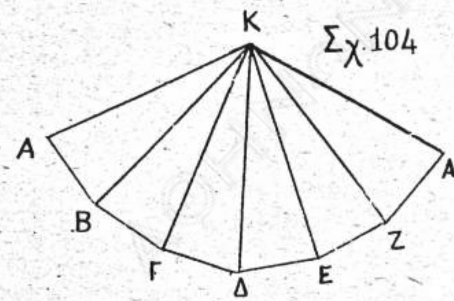

Σχ. 91

Σχ. 93

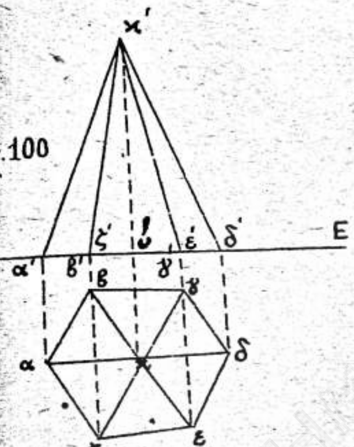



Σχ. 96

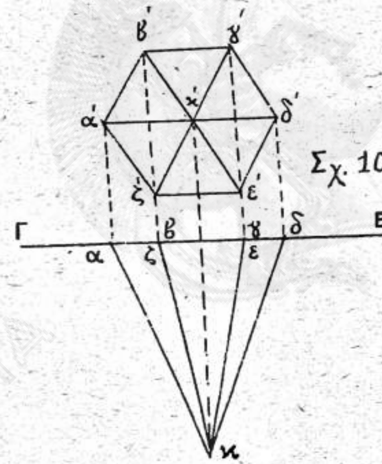


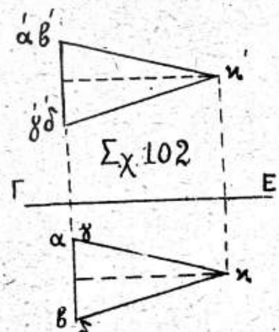

Σχ. 104



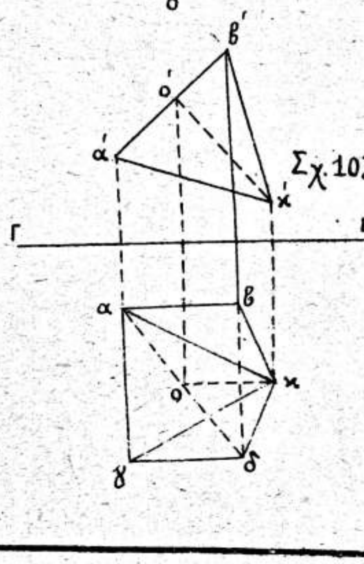

Σχ. 100




Σχ. 101

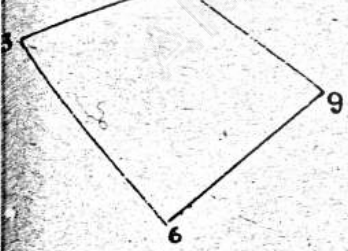



Σχ. 102




Σχ. 103

Σχ. 108




Σχ. 105